

Email exchange TC and JB in Dutch in 2014 on COTP and Sky and Van Hiele

Completing "Pierre van Hiele and David Tall: Getting the facts right " (2014) and "Education, division & derivative: Putting a Sky above a Field or a Meadow" (2014)

Thomas Colignatus, editor, thanking Jan Bergstra

<http://thomascool.eu>

(draft - September 25 2014), update 2016-05-06 w.r.t. underscoring internet links

NB. Overview is at: <http://thomascool.eu/Papers/Math/JB/Index.html>

Introduction

TC = Thomas Colignatus, JB = Jan Bergstra.

SM = school mathematics and its research,

RM = research mathematics = PM = professional mathematics

The email exchange was helpful for completing the final stages of:

(1) Pierre van Hiele and David Tall: Getting the facts right (2014)

<http://arxiv.org/abs/1408.1930> [2016: a version

(2) "Education, division & derivative: Putting a Sky above a Field or a Meadow.

Comments on the field, the meadow, the dynamic quotient and the derivative, as seen from education in mathematics (elementary, highschool & matricola)" (2014)

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

I have considered cutting up this collection in two, for those papers apart, (fissure At 2014-08-31 18:49) but there is an overlap that is very useful. Namely, paper two has a distinction between SM and RM (PM). Since education is an empirical issue, its research (in SM) is different than RM. The discussion shows that JB is less at home in SM though he seems to have (strong) opinions on it - while TC explicitly states not to be involved in RM (PM) though to present an important solution in logic and an essential redefinition of calculus.

Elsewhere there is the email exchange on the derivative and the sky-field-meadow in 2012. The latter caused paper two. The present emails concern the final stages of the paper. There has been no exchange in 2013. In 2013 TC had a workshop presentation (on the NVVW (Dutch math teachers union) annual conference) on the algebraic approach to the derivative. Notification and report were also sent to JB though.

Between June 30 and August 15 2014 there was also an email exchange on a KNAW conference on the education in arithmetic at elementary schools. This exchange has no content on division, but in the background these issues are relevant too.

A key point is that JB has the attitude "if I do not understand it then it must be wrong". This attitude seems to be rather common in RM. It is something of a subculture phenomenon. If you look closer at it, it is an abuse of concepts and a false phrase. If you hold that something is wrong, then you can only do so once you understand it, because then you can explain why it is wrong. If you do not understand something then you can say little about it. However, the subculture phrase can be confusing to outsiders. If an outsider hears that something that has math in it would be wrong, then this tends to block interest. This may be the very intention of that RM subculture phrase. But this is misleading to the non-RM world.

The following has been made anonymous w.r.t. other persons unless professionally involved. Professional reference is made to PvH = VH = Pierre van Hiele, DT = David Tall, HF = Hans Freudenthal, RG = Richard Gill, PH = Peter Harremoës, NV = Nellie Verhoef, HB = Harry Broekman.

The blockquotes have been made somewhat clearer. The text/reply format is flexible, sometimes the text is indented, sometimes the reply.

Texts by JB generally arrive at TC as a merged blocks of texts without paragraph sections. JB has been informed of this and starts his reply with capital letters. This allows a reconstruction.

Some footnotes in English may have been included to alert the reader (often on angles that reappear in the later discussion).

Contents

Introduction	1
Contents	2
At 2014-08-15 12:31, TC wrote:	3
At 2014-08-16 17:39, JB wrote:	3
At 2014-08-16 19:37, TC wrote:	4
At 2014-08-16 20:03, TC wrote:	7
At 2014-08-17 16:39, JB wrote:	8
At 2014-08-18 15:32, TC wrote:	8
At 2014-08-18 23:35, TC wrote:	11
At 2014-08-19 18:22, JB wrote:	12
At 2014-08-19 18:22, JB wrote:	12
At 2014-08-22 14:33, TC wrote:	13
At 2014-08-25 18:05, TC wrote:	13
At 2014-08-25 23:06, JB wrote:	14
At 2014-08-26 00:03, TC wrote:	14
At 2014-08-26 09:00, TC wrote:	15
At 2014-08-29 02:42, JB wrote:	15
At 2014-08-30 11:10, TC wrote:	16
At 2014-08-31 14:53, TC wrote:	17
At 2014-08-31 18:49, TC wrote:	17
At 2014-08-31 19:04, JB wrote:	17
At 2014-08-31 19:06, TC wrote:	17
At 2014-08-31 19:13, TC wrote:	18
At 2014-08-31 20:03, JB wrote:	19
At 2014-09-04 19:52, TC wrote:	20
At 2014-09-04 23:44, TC wrote:	21
At 2014-09-04 23:56, TC wrote:	23
At 2014-09-05 09:16, JB wrote:	24
At 2014-09-05 16:00, TC wrote:	25
At 2014-09-05 22:53, TC wrote:	25
At 2014-09-06 16:53, JB wrote:	26
At 2014-09-08 12:09, TC wrote:	27
At 2014-09-09 10:24, JB wrote:	27
At 2014-09-09 15:46, TC wrote:	28
At 2014-09-09 23:01, JB wrote:	28
At 2014-09-10 17:15, TC wrote:	29
At 2014-09-10 23:55, JB wrote:	29
At 2014-09-11 10:32, TC wrote:	30
At 2014-09-11 23:55, TC wrote:	32
At 2014-09-12 10:57, JB wrote:	33
At 2014-09-12 11:53, LB wrote:	33
At 2014-09-13 20:52, TC wrote:	34
At 2014-09-13 21:10, TC wrote:	36
At 2014-09-14 10:07, TC wrote:	37
At 2014-09-14 10:53, JB wrote:	38
At 2014-09-14 12:16, JB wrote:	40
At 2014-09-14 13:00, JB wrote:	40
At 2014-09-14 18:07, TC wrote:	41
At 2014-09-14 21:31, JB wrote:	42

At 2014-09-16 22:30, TC wrote:.....	43
At 2014-09-17 08:27, JB wrote:.....	44
At 2014-09-17 12:58, TC wrote:.....	45
At 2014-09-19 19:36, TC wrote:.....	45

At 2014-08-15 12:31, TC wrote:

Dag Jan,

Is de universiteit al weer begonnen ? Of heb je nog een klein momentje voordat de drukte losbarst ? Ik zou het althans prettig vinden wanneer je voor het betere begrip dit nog zou willen lezen over mijn achtergrond. Commentaar is niet nodig, maar bevestiging zou aardig zijn:

(1) "What a mathematician might wish to know about my work"
<http://thomascool.eu/Papers/Math/2013-03-26-WAMMWTKAMW.pdf>

(2) Dit volgende is wat meer vanuit de economie, maar onderwijs in wiskunde en KNAW komen ook langs: "After 45 years of mass unemployment: If Holland had been just a bit nicer and more competent" <http://thomascool.eu/Papers/Drgtpe/Crisis-2007plus/2014-06-05-After-45-years-of-unemployment.pdf>

Dat was het kleine verzoekje.

Overigens zul jij menen dat ik slecht of niet luister, maar ik meen dat je te weinig zicht heb op de didactiek, en e.e.a. valt empirisch te toetsen met bijv. zo'n voorgestelde herhaling bij de KNAW van mijn NVVW studiedag presentatie. Deze discussie hoeft niet te worden overgedaan. Ik maak alleen melding van jouw visie opdat je ziet dat ik hem ken.

Overigens merkte Richard Gill nog op dat hij nog wat met je van gedachten had gewisseld over de afgeleide. Ik kan niet garanderen dat Richard mijn aanpak volledig doorheeft, heb zelfs aanwijzingen van niet-volledig, dus wees hier behoedzaam. Ook deze discussie hoeft niet te worden overgedaan.

En het artikel over Pierre van Hiele en David Tall staat nu hier:
<http://arxiv.org/abs/1408.1930>

Met beste groet,

Thomas

At 2014-08-16 17:39, JB wrote:

Dag Thomas, Inmiddels heb ik dit allemaal gelezen en het leidt toch tot commentaar. Ik blijf toch zitten met het gevoel dat jij nauwelijks belangstelling lijkt te hebben voor kritiek op jouw werk. Is het werkelijk zo dat als iemand een fout of onduidelijkheid vindt jij daar mee aan de gang gaat. Ik zie dat niet, het spijt me, en dat element komt in het eerste stuk te zeer naar voren. Het is manifest NIET WAAR dat men jou niet wil melden wat er mis is, wie dat wel doet constateert dat jij daar niets van wil horen. ¹ Dit element komt steeds weer terug, ook in je tweede stuk. Iets wat ook steeds terugkomt is dat je al je bijdragen in een soort van combinatie verkoopt. Voor een buitenstaander is het zinloos en kansloos om zich tot een

¹ This is wrong. Notably: JB has not said what is erroneous in the definition of the dynamic quotient. He says that he doesn't understand this. He indeed shows this by substituting $x = x[z]$ in a syntactic text "unless x is a variable". But you cannot substitute, since clearly "unless $x[z]$ is a variable" is incorrect. He does not respect the definition. He does not explain however what would be wrong with the definition. He claims that the definition does not fit SM. Thus his explanation of what would be wrong would have to contain an explanation where the definition does not fit SM.

onderdeel ervan te beperken en daarmee aan de gang te gaan. Laat ik kritiek leveren op het stuk over Tall's receptie van van Hiele (PvH).

1) Deze kritiek zo te formuleren terwijl je de Engelse tekst van het boek van PvH, de bron voor Tall, niet bij de hand had vind ik problematisch.²

2) In zo'n stuk moet niet staan dat men het Freudenthal instituut moet opheffen etc. etc. Dat maakt het allemaal totaal onleesbaar. Dit is de koppelverkoop waarvan jij een gewoonte gemaakt hebt en die zo moeilijk te lezen is.

3) Het stuk zou meer moeten doen aan het voor en buitenstaander uiteenzetten van de inzichten van PvH. Iedereen die iets niet weet dat kwalijk te nemen is een volstrekt zinloze policy.

4) Ik neem aan dat Tall zelf vindt dat ie heel wat doet met het werk van PvH. Hij probeert dat werk en duidelijke plaats te geven in zijn eigen verhaal. Dat is (ook tegenover PvH) een verdienste en die verdienste wordt er niet minder om doordat hij PvH misschien "tekort doet" in de omschrijving van diens werk.

5) De evidentie die je formuleert dat PvH de reikwijdte van zijn "levels" breder zag dan bij meetkunde oogt niet zo overtuigend. een concluding remark is toch een bijzaak.³ De discussie over algebra is technisch onvoldoende duidelijk uitgewerkt om als evidentie te kunnen dienen.

6) Dat RME frauduleus is gaat als bewering erg ver. Zoiets vergt harde argumenten. Die worden niet gegeven, ik denk dat een verwijzing naar een eigen weblog onvoldoende is.

7) Ik denk dat het vermoeden dat Tall niet goed leest weinig oplost. Hij leest in wat er staat iets anders dan een ander.⁴ Ik denk dat de vraag "waarom Tall het niet goed begrijpt" een zinloze vraag is. Veel duidelijker te formuleren hoe het wel zit is nuttiger. Dat kan men dan toevoegen aan de visie van Tall. mvg Jan

At 2014-08-16 19:37, TC wrote:

Dag Jan,

Ik had gehoopt dat dit niet hoefde, maar laat ik een antwoord splitsen in twee delen.

Eerst hier t.a.v. Pierre van Hiele - David Tall, in een ander email over mijzelf. Ik ben je zeer erkentelijk dat je dat hebt willen bekijken, en kom er later op terug.

Bijgaand is de tekst van Pierre van Hiele (2002) uit de Tribute to Skemp, die David Tall mij stuurde, en die voor hem het bewijs vormde dat Van Hiele de draagwijdte van zijn theorie niet zou begrijpen (beperkt zou denken tot meetkunde). Dit is de tekst die ik in het artikel citeer, om te laten zien dat dit niet zo is.

Punten t.a.v. Pierre van Hiele - David Tall in je email:

At 2014-08-16 17:39, JB wrote:

Laat ik kritiek leveren op het stuk over Tall's receptie van van Hiele (PvH).

1) Deze kritiek zo te formuleren terwijl je de Engelse tekst van het boek van PvH, de bron voor Tall, niet bij de hand had vind ik problematisch.

Die had ik dus wel bij de hand: dat artikel uit 2002, dat ook in bezit is van Tall, die tenslotte editor was van dat boek over Skemp.

De Engelse vertaling "Structure and insight" 1986 zal niet veel afwijken van "Begrip en inzicht" uit 1973, gezien die tekst uit 2002.

Hij [DT] schreef me op 3 augustus (ik neem aan voor ons vertrouwlijk):
(...)

² This is wrong. Tall sent me Van Hiele (2002) that was key for Tall, before I started collecting my notes on PvH and DT. That I do not have Van Hiele (1986) in English is not much of a problem since I have Van Hiele (1973) in Dutch - that fits Van Hiele (2002).

³ Most people will think that conclusions are the main result of a paper.

⁴ But the text does not state what he reads.

2) In zo'n stuk moet niet staan dat men het Freudenthal instituut moet opheffen etc. etc. Dat maakt het allemaal totaal onleesbaar. Dit is de koppelverkoop waarvan jij een gewoonte gemaakt hebt en die zo moeilijk te lezen is.

Het is "History and Overview". Het is historisch belangrijk hoe men tegen de relatie Freudenthal & Van Hiele en de impact op de acceptaties in het buitenland aankijkt. Bij de beschrijving van de situatie dient het de helderheid dat dit instituut is op te heffen. Het is geen koppelverkoop maar maakt deel uit van hetzelfde plaatje. Hoe kan het toch, dat Tall zo'n verkeerd beeld van Van Hiele kreeg ? Dat is niet alleen door gebrek aan beschikbaarheid aan materiaal (door Freudenthal) maar ook over wat Freudenthal erover aan anderen vertelde (zie het artikel in NAW). Ik ben het niet eens met je commentaar, maar, in termen van peer-review betekent het dat ik dit argument in het artikel beter moet uitleggen.⁵

3) Het stuk zou meer moeten doen aan het voor en buitenstaander uiteenzetten van de inzichten van PvH.

Denkelijk heb je gelijk dat ik de "issue" moet verhelderen. Ik heb dat tot nu toe afgehouden, want dan gaat het lijken alsof ik zou willen optreden als rechter in een "priority" issue, en dat wil ik niet. Ik denk erover na.

Iedereen die iets niet weet dat kwalijk te nemen is een volstrekt zinloze policy.

Dat doe ik niet. Tall had beter kunnen lezen.

Ik heb hem overigens dezelfde argumenten gegeven en een gezamenlijk artikel voorgesteld. Maar wijst hij af, dus dan maar een artikel voor een tijdschrift. Hopelijk valt het kwartje alsnog.

4) Ik neem aan dat Tall zelf vindt dat ie heel wat doet met het werk van PvH. Hij probeert dat werk en duidelijke plaats te geven in zijn eigen verhaal. Dat is (ook tegenover PvH) een verdienste en die verdienste wordt er niet minder om doordat hij PvH misschien "tekort doet" in de omschrijving van diens werk.

- a) Ik geef die verdienste voor PvH aan.
- b) Ik geef aan dat het mooi is dat DT tot het inzicht van het belang komt.
- c) Mij gaat het puur om wat ik zeg: dat het werk van PvH veel meer juweeltjes bevat, die niet langer gezien zouden worden wanneer het gelezen gaat worden door de bril van DT alsof hij niet weet waarover hij schrijft.

5) De evidentie die je formuleert dat PvH de reikwijdte van zijn "levels" breder zag dan bij meetkunde oogt niet zo overtuigend. een concluding remark is toch een bijzaak.

Hoezo ? In 2002 bijgevoegd zegt PvH heel duidelijk (in de conclusie p46):

c. In most disciplines there are different levels of thinking: the visual level, the descriptive level and the theoretical level. Each level has its own network of relations and its own judgments of truth. The transition from one level to the next can not be realised by reasoning or reflecting.

Wat is er vaag aan "most disciplines" ?

De discussie over algebra is technisch onvoldoende duidelijk uitgewerkt om als evidentie te kunnen dienen.

⁵ Thus included in the paper on PvH & DT

Klopt. Die evidentie zit in het citaat van 2002 hierboven dat ik in het artikel aanhaal.

De discussie over algebra dient alleen om aan te geven dat DT verkeerd heeft gelezen, en dat een belangrijke publicatie, die hij zelf aanhaalt, PvH bevestigt.

6) Dat RME frauduleus is gaat als bewering erg ver. Zoiets vergt harde argumenten. Die worden niet gegeven, ik denk dat een verwijzing naar en eigen weblog onvoldoende is.

Ik heb niet de indruk dat mijn weblog op zichzelf mensen zal overtuigen. Het geeft wel een "roadmap" van een "vermoeden van een onregelmatigheid". Ik ben er alle vertrouwen in dat wanneer de KNAW ervoor gaat zitten, je de onregelmatigheden kunt opstapelen.

JK Lenstra heeft zelf al gewezen op het gebrek aan empirische evidentie, terwijl er wel die claim lag.

PvH heeft zelf al aangegeven dat HF hem vaak genoeg een hak zette. Ook hoe.

Zie, lees, haal de schellen van de ogen. Je weet nu dat DH [DT / TC] de theorie van PvH enorm belangrijk vindt. En terecht. Dit is enorm belangrijk voor hoe we ons onderwijs in wiskunde gaan vormgeven (met afwijzen van RME).

Verder is het niet mijn taak om als procureur generaal of rechter op te treden. Ik stuit in het onderzoek naar onderwijs in wiskunde op een paar leuke mogelijkheden tot verbetering, en ook op oud zeer. Ik probeer dat zo degelijk mogelijk uit te leggen. En mensen behulpzaam te zijn. Meer niet.

7) Ik denk dat het vermoeden dat Tall niet goed leest weinig oplost. Hij leest in wat er staat iets anders dan een ander. Ik denk dat de vraag "waarom Tall het niet goed begrijpt" een zinloze vraag is. Veel duidelijker te formuleren hoe het wel zit is nuttiger. Dat kan men dan toevoegen aan de visie van Tall.

Dit is het te eenvoudig. Mijn kernpunt is dat het werk van PvH vele rijkdommen bevat, die door de verkeerde duiding van DT verloren kunnen gaan. Dus je moet mijn probleemstelling wel zuiver herformuleren.

Vervolgens:

(a) Tall leest inderdaad iets anders. Vertel maar hoe jij het artikel van PvH 2002 leest, nu je het hebt, en wat Tall daarvan maakt.

(b) Waarom Tall het niet begrijpt, is inhoudelijk zinloos, maar historisch relevant, en ook relevant voor het begrip van PvH.

(c) "Toevoegen aan het begrip van Tall" is te eenvoudig. Ik heb nu detail commentaar op hoofdstukken 1-3, en de deconstructie vergt meer. Ik ben er af en toe verbaasd over welke kronkels er zijn. Maar dat doet aan het artikel over PvH - DT niets af.

Resumerend:

Hopelijk hebben de reviewers van het tijdschrift waar het artikel is aangeboden eveneens zulk kritisch commentaar, en heb ik de inspiratie om er adequaat op te reageren zodat het tot publicatie komt. Het liefst zag ik DT vaststellen dat hij PvH verkeerd heeft begrepen. Ook hoop ik dat de interviews in NAW vertaald worden, en dat Structure & Insight opnieuw wordt uitgegeven.

Maar, mijn vraag was of je die twee artikelen over mijn positionering wilde bekijken, opdat daarover misverstanden konden vermeden, en daarover dan straks.

Met beste groet,

Thomas

At 2014-08-16 20:03, TC wrote:

Re: t.a.v. mijzelf / RE: Klein verzoekje

Beste Jan,

At 2014-08-16 17:39, JB wrote:

Dag Thomas, Inmiddels heb ik dit allemaal gelezen en het leidt toch tot commentaar. Ik blijf toch zitten met het gevoel dat jij nauwelijks belangstelling lijkt te hebben voor kritiek op jouw werk. Is het werkelijk zo dat als iemand een fout of onduidelijkheid vindt jij daar mee aan de gang gaat. Ik zie dat niet, het spijt me, en dat element komt in het eerste stuk te zeer naar voren. Het is manifest NIET WAAR dat men jou niet wil melden wat er mis is, wie dat wel doet constateert dat jij daar niets van wil horen. Dit element komt steeds weer terug, ook in je tweede stuk. Iets wat ook steeds terugkomt is dat je al je bijdragen in een soort van combinatie verkoopt. Voor een buitenstaander is het zinloos en kansloos om zich tot een onderdeel ervan te beperken en daarmee aan de gang te gaan.

Wat kan ik in hemelsnaam daarover zeggen:

(1) Ik heb altijd kritiek verwerkt wanneer die mij redelijk leek, bijv. ook wanneer anderen mij deskundiger leken dan ikzelf. Door die kritiek te overdenken heb daar ook heel veel van geleerd. Mijn werk heeft in belangrijke mate ook alleen die kwaliteit dankzij die voorgaande kritiek, waarvoor ik dank zeg. Ik protesteer niet tegen kritiek, alleen tegen drogredenen en op de man spelen (zoals wiskundigen die plotseling kennis van economie claimen).

(2) Aan mijn boeken voeg ik "Reading Notes" toe, met zulke kritiek en antwoorden. Bijv. t.a.v. COTP, waarbij jij nog niet bijstaat omdat ik onze discussie nog niet als afgerond beschouwde. Wanneer ik onze emails heb verzameld en een beeld heb waar je kernpunt zou kunnen liggen, komt het erbij:

<http://thomascool.eu/Papers/COTP/2011-08-23-ReadingNotesForCOTP.pdf>

(3) Een voorbeeld van kritiek die ik meteen accepteer was een fout in VTFD:

<http://thomascool.eu/Papers/VTFD/2011-11-11-Erratum-VTFD.pdf>

Inmiddels is er een 4e editie. Markus Schulze krijgt al mijn dankbaarheid voor het corrigeren van mijn fout. Maar ik moet helaas weer constateren dat hij doordraaft. Het is lastig om dank en kritiek te combineren, maar ik heb nu een 4e editie gegeven waarin de situatie gewoon wordt uitgelegd:

<http://thomascool.eu/Papers/VTFD/Index.html>

(4) Ik vind het flauw zo'n voorbeeld van kritiek te moeten geven: want ik heb het in mijn leven ontelbare keren meegemaakt, met kritiek van mezelf, kritiek van anderen. Het is een habitus dat je open staat voor kritiek.

Tussen jou en mij speelt nu, blijkbaar, dat jij niet die habitus ervaart, vermoedelijk gebaseerd op de ervaring van vorig jaar.⁶

Zoals ik schreef, wilde ik eerst mijn opmerkingen t.a.v. het boek van David Tall afronden, voordat ik onze emails van vorig jaar verzamel. Ik had al kritiek op dat boek, maar ben toch

⁶ See the collection of emails 2012, that basically shows that it is JB who doesn't listen well. Of course I have the advantage of presenting something new while he has to "get" it.

verbaasd over wat ik allemaal tegenkom wanneer ik er in detail over ga denken. Los van wat ik reeds t.a.v. Van Hiele meldde.⁷

Mij voorstel is aldus hierop terug te komen wanneer ik de emails tussen ons verzameld heb.

Laat ik je nogmaals mijn dank zeggen dat je naar die twee papers gekeken hebt. Ik vermoed hier ook de invloed van Richard Gill die me hoe dan ook een vorm van aanbeveling heeft gegeven. Daar mag je hem ook voor bedanken. Werkende weg komen we verder.

Met beste groet,

Thomas

At 2014-08-17 16:39, JB wrote:

Beste Thomas, ik kan mij wel voorstellen dat de vH niveaus primair als iet in de meetkunde worden gezien. Harry Broekman en Nellie Verhoef schrijven dat letterlijk (Euclides 2010). In het stuk dat jij mij stuurde vind ik nauwelijks een aanwijzing dat vH de zaken algemener zag los van het feit dat hij een vrij algemene stijl van schrijven heeft. Op p. 202 van bijgevoegde attachment (wie dit geschreven heeft is mij op dit moment niet duidelijk)⁸ wordt ook de indruk gewent dat vH wel dacht dat de theorie verder kon worden doorgezet dan meetkunde onderwijs, maar eigenlijk wordt Freudenthal gepositioneerd als iemand die dat ook deed. Ik zie nog niet waarom dat niet zo zou zijn geweest.⁹ All in vind ik de casus voor de positionering van de vH levels als een theorie over meetkunde onderwijs nog wel te begrijpen.¹⁰ Als de generalisatie naar rekenkunde en algebra die door PvH in het stuk over Skemp wordt beschreven heeft zoveel voeten in de aarde dat je je afvraagt of het nog wel over dezelfde zaak gaat. mvg, Jan PS Ik ben wat materiaal over PvH gaan bekijken (...)

[Attachment: Chapter 7 of thesis of Sacha La Bastide - Van Gemert]

At 2014-08-18 15:32, TC wrote:

Beste Jan,

At 2014-08-17 16:39, JB wrote:

Beste Thomas, ik kan mij wel voorstellen dat de vH niveaus primair als iet in de meetkunde worden gezien.

Nou, dat is hardnekkig misverstand, maar wanneer je erop alert bent, dan zie je dat het een misverstand is.

Kernpunt: Piaget's theorie was een algemene ontwikkelingstheorie en Van Hiele stelde daar zijn niveau's tegenover, derhalve ook algemeen. Wel met meetkunde als voorbeeld, maar slechts dat.

Het kernpunt dat het om algemene theorie gaat is op zichzelf al bewijs genoeg.

⁷ Early in September 2014 I decided that I had too many other comments on Tall's book that I better first finish the discussion with JB.

⁸ Chapter 7 of thesis of Sacha La Bastide - Van Gemert

⁹ The paper on PvH & DT has now been extended with the explanation and proof that that chapter 7 is inconsistent: It **both** shows that PvH already had that claim **and** it says that it was HF who created that general applicability. An inquiry since August 19 at the author and the thesis supervisors on this inconsistency has not yet resulted in a response on content by September 18.

¹⁰ Thus it is a major point to establish that this is not the case, and that PvH has been maltreated.

Zolang je je niet verdiept in de didactiek van wiskunde (maar hier een beetje in de marge wezenlijk aan het beunhazen bent) dan begrijp ik dat je het misverstand niet meteen herkent, maar volg mijn advies dan toch om je in die didactiek te gaan verdiepen.

Eventueel nog:

(a) De opmerkingen op verschillende plaatsen in Van Hiele's boek uit 1973.

(b) Zijn conclusie in het artikel uit 2002 dat David Tall aanhaalt en dat ik je zond.

(c) Het hoofdstuk 7 dat je meezond p190: "In zijn proefschrift analyseerde Van Hiele de rol die het inzicht in het wiskundeonderwijs speelde. Hij beperkte zich daarbij tot het meetkundeonderwijs, aangezien hij geen principiële verschillen zag tussen inzicht in meetkunde en inzicht in wiskunde in het algemeen."

En lees dan ook door op pag 191.

Het blijkt hier te gaan om H7 van het proefschrift van Sacha la Bastide-van Gemert, nu epidemiologisch statisticus te Groningen.
<http://www.wevervanwijnen.nl/27elke-positieve-actie-begint-met-critiek-27-s-la-bastide-van-gemert-9789065509123.html>

NB. Je kunt in dat H7 ook lezen dat Freudenthal de gemene truuc uithaalt om te stellen dat Van Hiele alleen naar meetkunde kijkt maar dat hij, HF, pas ziet dat het iets algemeen is. Immers op p182:

HF: "Het mathematiseringsproces waar de Van Hieles zich vooral mee bezighielden, was dat van de meetkunde, preciezer gezegd: ze waren de eersten die het meetkundig leerproces als proces van mathematiseren interpreteerden (al gebruikten ze de term niet, evenmin als de term heruitvinding). Zodoende ontdekte Pierre in het onderwijs, zoals Dieke het beschreef, de niveaus waarvan ik eerder sprak. Ik pakte die ontdekking op – wellicht het belangrijkste element in mijn eigen wiskunde-onderwijskundig leerproces."

We zien die grove leugen ook herhaald door anderen. Bijvoorbeeld Goffree p22:
<http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6862.pdf>

Nuttig is overigens ook Broekman & Verhoef, p123 laatste kolom verwijzing naar Van Hiele in het Duits, over continue en discreet (meetkunde vs rekenen/algebra), wederom een antwoord op Tall's misvatting.

<http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2012-13-2-121.pdf>

Overigens aardig vond ik dit, de stagnatie in het onderwijs in wiskunde:

http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/artikelen00-10/103/1003_maart_vanhiele.pdf

Harry Broekman en Nellie Verhoef schrijven dat letterlijk (Euclides 2010).

Kun je hier een letterlijk citaat van deze twee auteurs geven ? Ik vind hier alleen maar een verwijzing naar Google, waar het blijkbaar nogal gangbaar misverstand herhaald wordt:

<http://doc.utwente.nl/79984>

http://doc.utwente.nl/79984/1/100jaar_PvH%2C_deel1.pdf

Het is niet ondenkbaar dat Broekman en Verhoef het zorgvuldiger hadden geformuleerd wanneer zij beter hadden beseft dat Freudenthal ermee aan de haal ging en Tall vervolgens ook.

In het stuk dat jij mij stuurde vind ik nauwelijks een aanwijzing dat vH de zaken algemener zag los van het feit dat hij een vrij algemene stijl van schrijven heeft.

Wat is er in vredesnaam vaag aan de conclusie, die ik je expliciet voorlegde ?

Waarom stel je "een concluding remark is toch een bijzaak"" ??????? Een opmerking in de conclusies zou een bijzaak zijn ??????

5) De evidentie die je formuleert dat PvH de reikwijdte van zijn "levels" breder zag dan bij meetkunde oogt niet zo overtuigend. een concluding remark is toch een bijzaak.

Hoezo ? In 2002 bijgevoegd zegt PvH heel duidelijk (in de conclusie p46):

c. In most disciplines there are different levels of thinking: the visual level, the descriptive level and the theoretical level. Each level has its own network of relations and its own judgments of truth. The transition from one level to the next can not be realised by reasoning or reflecting.

Op p. 202 van bijgevoegde attachment (wie dit geschreven heeft is mij op dit moment niet duidelijk) wordt ook de indruk gewent dat vH wel dacht dat de theorie verder kon worden doorgezet dan meetkunde onderwijs, maar eigenlijk wordt Freudenthal gepositioneerd als iemand die dat ook deed. Ik zie nog niet waarom dat niet zo zou zijn geweest.

(a) Het is van Sacha la Bastide-van Gemert.

(b) Het was Van Hiele die die niveaus introduceerde, niet Freudenthal. FH zegt netje dat PvH licht in de duisternis bracht.

(c) Van Hiele deed dat als algemene theorie, met meetkunde als voorbeeld voor zijn proefschrift.

(d) Het is evident dat Freudenthal dat algemene overnam.

(e) De wetenschappelijke fraude van Freudenthal is dat hij de indruk wekte dat Van Hiele alleen aan meetkunde dacht en dat hij, HF, het uitbreidde.

(f) Ik mag je danken voor deze link naar deze pagina in dit proefschrift: Freudenthal's citaat toont de fraude.

(g) Het verdient aanbeveling om degenen die het gangbare misverstand napraten, hierop attent te maken, opdat zij kunnen corrigeren.

All in vind ik de casus voor de positionering van de vH levels als een theorie over meetkunde onderwijs nog wel te begrijpen.

Alleen als misleiding door Freudenthal en als misverstand door napraters en/of mensen met beperkte toegang tot het werk van Van Hiele.

Als de generalisatie naar rekenkunde en algebra die door PvH in het stuk over Skemp wordt beschreven heeft zoveel voeten in de aarde dat je je afvraagt of het nog wel over dezelfde zaak gaat.

(a) Als theorie gaat het over hetzelfde.

(b) Voor praktische didactiek zul je bij meetkunde andere voorbeelden gebruiken dan bij rekenen en algebra. Bijvoorbeeld kun je bij meetkunde een rechte hoek aanschouwelijk

maken door een papier dubbel te vouwen, een kwart slag draaien, en weer dubbel vouwen maar nu netjes over de vorige vouw. Voor het aanschouwelijk maken van $1 + 1 = 2$ zou je knikkers kunnen gebruiken.

mvg, Jan PS Ik ben wat materiaal over PvH gaan bekijken (..)

(...)

PM. Bij dit alles werd ik wel weer even moe van de onzorgvuldigheid van het FI - FHWRWI. Ik had vertrouwd op de beschrijving dat Pierre bij Langeveld was gepromoveerd, en Dieke bij Freudenthal, zie ook hier: "In 1957 promoveerde hij bij Langeveld op het proefschrift "De problematiek van het inzicht"."

http://www.fisme.science.uu.nl/wiki/index.php/Pierre_van_Hiele

Maar het blijkt dus andersom en moet ik mijn verschillende teksten met deze verkeerde info weer gaan aanpassen ...

Maar goed, ik had zelf ook hier beter kunnen lezen en toetsen (geldt dat als een voorbeeld van fouten corrigeren ?):

<http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2005-06-3-247.pdf>

<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=102372>

Met groet,

Thomas

At 2014-08-18 23:35, TC wrote:

Beste Jan,

Ik heb mijn concept-artikel over Van Hiele - Tall aangepast met pag 7 en 8 over dat Hoofdstuk 7 dat je me toestuurde, van Sacha La Bastide - [Van] Gemert.

Het is dezelfde link op mijn website, intern aangepaste datum van vandaag:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-27-VanHieleTallGettingTheFactsRight.pdf>

Ook aangepast dat HF de promotor van PvH was, en een zin toegevoegd dat het artikel de niveau-theorie niet nog eens uitlegt.

Bespreking van dat Hoofdstuk 7 was weer puzzelen. Klaarblijkelijk is La Bastide inconsistent, want ze citeert de Van Hiele's in Euclides 1957 dat hun theorie algemene strekking heeft, wijder dan alleen meetkunde, en vervolgens gaat ze uitleggen dat het juist Freudenthal was die daar later voor ging zorgen

Klaarblijkelijk heeft La Bastide toch niet zo'n goed begrip van die niveautheorie gehad, en een roze bril t.a.v. Freudenthal.

<http://dissertations.ub.rug.nl/faculties/arts/2006/s.la.bastide.van.gem>

Ik zal haar vragen of ze nog interesse heeft voor haar proefschrift, en of ze een verheldering heeft.

Ook de redactie van het tijdschrift inlichten en arXiv aanpassen Maar het is wel nuttig dat nu uit onafhankelijke bron het inzicht van Van Hiele uit 1957 geciteerd wordt, en dat duidelijker is Freudenthal zelf is gaan amateurs en niet meer adequaat is gaan verwijzen.

Met groet,

Thomas

At 2014-08-17 16:39, JB wrote:

Op p. 202 van bijgevoegde attachment (wie dit geschreven heeft is mij op dit moment niet duidelijk) wordt ook de indruk gewent dat vH wel dacht dat de theorie verder kon worden doorgezet dan meetkunde onderwijs

(... en zie de rest van mijn vorig email

At 2014-08-19 18:22, JB wrote:

Dag Thomas, ik denk dat je punt dat PvH zijn theorie zelf ruimer zag dan in de meetkunde wel hard te maken valt. Maar hij heeft het zo te zien alleen voorde meetkunde uitgewerkt.¹¹ Dat legitimeert m.i. wel de meetkunde als diens primaire onderwerp te zien, ook al zag hij het zelf eerder als een voorbeeld dan als een casus met specifieke aspecten die voor zijn niveautheorie relevant waren.¹² Ik meen dat het gegeven deze omstandigheden legitiem is om PvH te zien als iemand die voor meetkunde-onderwijs relevante niveaus heeft omschreven.¹³ Dat men bij het verwijzen zich concentreert op waar PvH specifiek aan gewerkt heeft is m.i. redelijk¹⁴ zij het niet noodzakelijk. Ik heb nog heel wat internationale verwijzingen naar de VH levels bekeken en ik kom overal de focus op meetkunde tegen.¹⁵ Dat naar voren te schuiven is niet specifiek actie van David Tall, en dat Nellie Verhoef het ook zo ziet verbaast mij niet.¹⁶ Ik wil wel proberen om met Nellie Verhoef over PvH te praten, maar dan moet ik echt veel beter weten hoe e.e.a. in elkaar zit. De link tussen realistische wiskunde en de VH levels is mij op dit moment volkomen onduidelijk. Mij ontgaat dat RW ontwikkelen de stap is die je op basis van VH levels zou zetten. Ik weet ook niet of er iemand in NL op dit moment nog aan of met de VH levels werkt.¹⁷ Ik heb er geen aanwijzingen voor dat dat zo zou zijn. Op dit moment is mij zelfs onduidelijk hoeveel VH levels er zijn (ik meen nu 5, te tellen van 1 tot 5, met een pre-VH level er onder dat niet door vH is beschreven, maar dat daar volgens een aantal auteurs wel zou passen.) mvg, Jan

At 2014-08-19 18:22, JB wrote:

Dag Thomas, ik denk dat je punt dat PvH zijn theorie zelf ruimer zag dan in de meetkunde wel hard te maken valt. Maar hij heeft het zo te zien alleen voorde meetkunde uitgewerkt.

Dat "zo te zien" is dan nader te toetsen.

Ik heb het tot nu toe onzinnig gevonden om het te gaan turven in Van Hiele 1973, maar wellicht heeft iemand anders dat al gedaan.

Broekman en Verhoef (2012) p123 schrijven:

<http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2012-13-2-121.pdf>

¹¹ "Zo te zien" ("Looking at it") is blurring the issue. A reference was given to PvH 1973 and an article in German on arithmetic. Why neglect this? There can be other sources.

¹² This is logically inconsistent. An example does not destroy the general case.

¹³ The statement is ambiguous, and it is curious that a mathematician selects an ambiguous statement. It is correct that PvH presented levels for geometry, but it is incorrect to suggest that he did so only for geometry. JB goes along in covering up the maltreatment of PvH by HF.

¹⁴ It is not reasonable when the discussion is about the general claim (e.g. in the thesis by La Bastide – Van Gemert).

¹⁵ International references to PvH may be disinforming by the situation in Holland.

¹⁶ As said also Verhoef may not be fully informed.

¹⁷ I do. "Conquest of the Plane" (2011) uses the Van Hiele levels.

"Op de achtergrond speelde hierbij de worsteling van Van Hiele met het werken met twee verschillende intuïties die ook al bij Pythagoras en zijn tijdgenoten te onderkennen waren. Dit komt voor lerende kinderen tot uiting in de intuïtie van continuïteit en die van discreetheid zoals die naar voren komen in de (ruimte-) meetkunde respectievelijk het (met gehele getallen) rekenen. Die discreetheid heeft betrekking op de overgang van aanschouwelijkheid naar abstracties in de vorm van symbolen — dus het zich losmaken van het aanschouwelijke beeld dat het 'aantal' bepaald heeft. Het rekenen komt in zicht, getallen zijn knooppunten geworden in een groot relatiernet [5, pp. 113–114]"

[5] P.M. van Hiele (1964), Rechenunterricht und Zahlbegriff: Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffes und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht, Westermann: Taschenbuch

Ik weet ook niet of er iemand in NL op dit moment nog aan of met de VH levels werkt. Ik heb er geen aanwijzingen voor dat dat zo zou zijn. Op dit moment is mij zelfs onduidelijk hoeveel VH levels er zijn (ik meen nu 5, te tellen van 1 tot 5, met een pre-VH level er onder dat niet door vH is beschreven, maar dat daar volgens een aantal auteurs wel zou passen.)

"Conquest of the Plane" is geschreven met een oog op die niveau's, zie daar, met ook de uitleg van de fout van Freudental. Ik hanteer nu 0 (intuïtief) tot 4 (Euclides / Hilbert, hoe verschillend ook). Het lijkt me dat je e.e.a. pragmatisch kunt indelen afhankelijk van je didactisch project. Naast dat inzicht t.a.v. die niveaus zijn de opmerkingen van Van Hiele daarover zeer inzichtelijk.

NB. Ik verwacht hier geen antwoord op, en meld me weer wanneer (...) of, een andere wezenlijke aanleiding.

Met groet,

Thomas

At 2014-08-22 14:33, TC wrote:

Hi Jan,

Ik neem aan dat je nu druk met je instituut bent.

Ik heb je onderstaande kritiek in het artikel verwerkt. Als je er al naar zou willen kijken dan vermoed ik het weekend. Achterin zeg ik je anoniem dank voor je kritiek en het wijzen op dat Hoofdstuk 7. Wanneer je wilt dat ik je naam noem dan pas ik het aan. Ik wacht nog op de details van Broekman over de promotores.

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-27-VanHieleTallGettingTheFactsRight.pdf>

Met groet,

Thomas

At 2014-08-25 18:05, TC wrote:

Hi Jan,

Je zei ergens dat je nog niet helder was wat het verschil tussen Van Hiele en Freudenthal nu was, in relatie tot niveau 0.

Ik interpreteer het als het verschil tusssen "concreet versus abstract" (PvH) en "werkelijkheid versus model" (HF). Zie onderstaand voorbeeld. Mijn tekst:

Speaking about Tall and multiplication: Apparently the English pronunciation of the tables of multiplication can be wrong too. E.g. 'two fours are eight' refers to two groups of four, and thus implies an order, while merely 'two times four is eight' gives the symmetric relation in arithmetic. Said book p94 compares a table with 3 rows and 4 columns, and Tall argues: "the idea of three cats with four legs is clearly different from that of four cats with three legs. The consequence is that some educators make a distinction between 4×3 and 3×4 . (...) I question whether it is a good policy to *teach* the difference. (...) [reference to Piaget] (...) So a child who has the concept of number should be able to see that 3×4 is the same as 4×3 ."

Tall doesn't explain this: Pierre van Hiele focuses on the distinction "concrete versus abstract", would focus on the table, so that children would master the insight that the order does not matter for arithmetic. Once they have mastered arithmetic, they might consider "reality versus model" cases without becoming confused by arithmetical issues hidden in those cases. Instead, Hans Freudenthal with his "realistic mathematics education" (RME) would present kids with the "reality versus model" cases (e.g. also five cups with saucers and five cups without saucers, a 3D table), and argue that this would inspire kids to re-invent arithmetic, though with some guidance ("guided re-invention"). Earlier, I wondered why Freudenthal blocked empirical research in what method works best (and my bet is on Van Hiele).

deel van

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/08/25/confusing-math-in-elementary-school>

Met groet,

Thomas

At 2014-08-25 23:06, JB wrote:

Dag Thomas,

begrijpen doe ik dit nog niet. Zijn voor van Hiele de tafels van vermenigvuldiging een beginpunt? Die zitten toch niet op het visuele nivo?

In een scheef lichaam (vermenigvuldiging niet commutatief) geldt $4 \times 3 = (1+1+1+1) \times (1+1+1) = \dots = 3 \times 4$. Daarvoor is uitsluitend nodig links of rechts distributiviteit van \times over $+$ en associativiteit van $+$. Het is mij dan ook onduidelijk hoe je een bruikbaar verschil tussen 4×3 en 3×4 kunt handhaven, laat staan onderwijzen.

Waar blijkt uit dat bij RME de wiskunde door een leerling vanuit de reality moet worden ondekt.

mvg
Jan

At 2014-08-26 00:03, TC wrote:

Hi Jan,

At 2014-08-25 23:06, JB wrote:
begrijpen doe ik dit nog niet. Zijn voor van Hiele de tafels van vermenigvuldiging een beginpunt? Die zitten toch niet op het visuele nivo?

Teken een tabel van 3 rijen en 4 kolommen bijvoorbeeld gevuld met bolletjes.

Maar het is een goede tip: ik kan zo'n plaatje toevoegen.

In een scheef lichaam (vermenigvuldiging niet commutatief) geldt $4 \times 3 = (1+1+1+1) \times (1+1+1) = \dots = 3 \times 4$.

Is het dan niet per implicatie commutatief ?

Daarvoor is uitsluitend nodig links of rechts distributiviteit van \times over $+$ en associativiteit van $+$. Het is mij dan ook onduidelijk hoe je een bruikbaar verschil tussen 4×3 en 3×4 kunt handhaven, laat staan onderwijzen.

Tall p94 geeft het voorbeeld van de 'state-operator-state'. Dan betekent 4 (times 3) wat anders dan 3 (times 4).

Vector en scalair.

Waar blijkt uit dat bij RME de wiskunde door een leerling vanuit de reality moet worden ondekt.

[http://www.fisme.science.uu.nl/en/wiki/index.php/Realistic Mathematics Education](http://www.fisme.science.uu.nl/en/wiki/index.php/Realistic_Mathematics_Education)

En zie mijn bespreking van Tall over Van den Heuvel - Panhuizen:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-27-VanHieleTallGettingTheFactsRight.pdf>

Het dogmatische van de realiteit is afgesleten en men spreekt ook over "als werkelijk ervaren" en model/context, zodat dit "moet" niet meer het heilige vuur heeft, maar men houdt wel weer aan de aanduiding RME vast. Het is dan wel zo helder om naar Freudenthal zelf te verwijzen: "The present form of RME is mostly determined by Freudenthal's view on mathematics (Freudenthal, 1991). Two of his important points of views are mathematics must be connected to reality and mathematics as human activity."

Met groet,

Thomas

At 2014-08-26 09:00, TC wrote:

Hi Jan,

Ik heb een plaatje toegevoegd. NB. Ik zond je die link ook omdat jouw eigen voorbeeld van didactiek (vanuit informatica) op breuken betrekking had, en ik in deze link daar ook iets over zeg:

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/08/25/confusing-math-in-elementary-school>

Cheers,

Thomas

At 2014-08-29 02:42, JB wrote:

Dag Thomas, ik heb het gezien. Dat deel van de tekst lijkt me ok.

Of je mijn naam wel of niet noemt is werkelijk jouw zaak. Ik heb er niets tegen, maar ik zit er ook helemaal niet mee als je het niet doet. Er zijn zoveel zaken waar mijn naam genoemd had kunnen worden en waar dat niet gebeurt, ik vind dat volslagen normaal.

"The heart of the idea of levels of thought lies in the statement that in each scientific discipline, it is possible to think and to reason at different levels, and that this reasoning calls for different languages. These languages sometimes use the same linguistic symbols, but these symbols do not have the same meaning in such a case, and are connected in a different way to other linguistic symbols. This situation is an obstacle to the exchange of views which goes on between teacher and student about the subject matter being taught. It can perhaps be considered the fundamental problem of didactics." ¹⁸

Je tekst zinnig te lezen en van extra commentaar te voorzien kan ik op dit moment niet. Mij staan de vH levels onvoldoende duidelijk voor de geest. Ik heb geprobeerd het op breuken toe te passen en dat lukte mij eigenlijk niet.

Jij levert een heel overtuigende quote van VH over levels en denken op verschillende levels ie alles met breuken te maken heeft, maar dat betreft dan een veel fijnmaziger indeling in levels dan waarover VH volgens mij spreekt. VH constateert dat het feit dat je over de zelfde zaak in verschillende levels kunt denken het kernprobleem van de didactiek is. Daarmee ben ik het eens, maar het is ook een probleem voor de discipline waarin de daaruitvoortkomende ambiguïteten optreden. Die vergt misschien revisie, niet de lesmethode.

mvg
Jan
(weer terug uit Polen)

At 2014-08-30 11:10, TC wrote:

Hi Jan,

(...)

At 2014-08-30 10:32, JB wrote:

. Dus de betere vraag is m.i. "Wat precies is de ontdekking van HF waar LBvG melding van maakt. Immers letterlijk gelijk met een bewering van PvH zal die ontdekking toch wel niet zijn." mvg, Jan

Zie de citaten uit Hoofdstuk 7 in mijn artikel Bijlage B: HF reproduceert wat PvH al naar voren bracht:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-07-27-VanHieleTallGettingTheFactsRight.pdf>

(1) Het is algemeen ipv alleen meetkunde

(2) Niveaux treden ook op in het doen van wiskundig onderzoek zelf: bijv. de ontwikkeling van axiomatic

(3) De manier waarop niveau-transities optreden: al beschreven door Van Hiele maar door HF vervangen door eigen frasen: "reflectie" en "begeleid heruitvinden"

(4) Dat taaluitingen per niveaux een andere inhoud hebben.

NB. T.a.v. je eigen onderzoek aan de didactiek van deling, heb ik al eens opgemerkt dat PvH in "Begrip en inzicht" daar een hoofdstukje over heeft, en dat een aanrader is. Ik hoopte op een opmerking dat je het zou bekijken.

¹⁸ Quote from my weblog, where I quote Van Hiele.

Met groet,

Thomas

At 2014-08-31 14:53, TC wrote:

Hi Jan,

Blijkbaar is Begrip en Inzicht bij mooiboek.nl te krijgen:

<http://www.boekwinkeltjes.nl/singleorder.php?id=140092319>

Cheers,

Thomas

At 2014-08-31 18:49, TC wrote:

Hi Jan,

Ik had een email discussie met Peter Harremoes uit Denemarken over rekenen met $H = -1$:

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/08/30/taking-a-loss>

Vervolgens kwam ik op dat hoofdstuk in Van Hiele over hervormen van breuken van $y / x = y * x^H$. Dit geeft mij weer het probleem hoe de dynamische deling te noteren maar op zich blijft $y // x$ redelijk wanneer inmiddels bekend is wat breuken zijn.

Ik heb dat hoofdstuk voor Harremoes gescand - Peter kent Nederlands.

Ik kan die scans ook naar jou sturen, maar ik adviseer wel "Begrip en inzicht" te lezen.

In dit hoofdstuk zegt Van Hiele overigens dat axiomatic gemakkelijker te leren valt aan de groepentheorie in de algebra dan in meetkunde.

Cheers,

Thomas

At 2014-08-31 19:04, JB wrote:

Dag Thomas, ik wil wel weten wat PvH over de breuken meldt. Ik probeer overigens zijn boek wel te kopen. Dat je axiomas makkelijk in algebra leert dan in meetkunde is tamelijk evident. Het simpelste systeem voor de meetkunde van Hilbert heeft geloof ik 23 axioma's de Grieken hadden er 5. Zoiets is er in de algebra niet geweest. Algebra kan met vergelijkingen, meetkunde niet voor zover mij bekend. Heeft deze Harremoes een echte paper over rekenen met H ? Ik heb toevallig twee maanden gelden een reeks verschillende manieren om minus te specificeren bekeken en het viel me op hoe complex dat eigenlijk is. Best opmerkelijk dat men dat kinderen zomaar kan leren. Uiteindelijk heb ik iets dat goed genoeg werkt, het kan denk ik niet veel beter, maar het blijft een keuze uit veel varianten. De complicaties hebben alle met het positiestelsel te maken natuurlijk, in unaire notatie is de zaak inderdaad triviaal. mvg, Jan

At 2014-08-31 19:06, TC wrote:

Re: Scans Van Hiele over $y / x = y * x^H$

Hi Jan,

Hier de scans,

Cheers,

Thomas

At 2014-08-31 19:13, TC wrote:

Hi Jan,

Dit is wat Peter me schreef, en met de tabellen en met Google Translate kun je tamelijk redelijk e.e.a. begrijpen. Hij schrijft -1 als 1-met-een-punt maar dat lijkt me onhandig, en $H = -1$ is beter, als de halve draai van de cirkel zoals i een kwart slag is. Ik heb kleine h overwogen maar H heeft een schaduw van -1, en lijkt beter. Hier zijn tekst met link naar "talnot":¹⁹

"The problem with notation for negative numbers is much more severe than the other notational problems we have discussed, and it seem to be one of the major sources for errors in mathematics. Some calculators disguise between minus as an operation and minus as notation for negative numbers. The students really get confused about this and this is in it self a source of errors.

To solve this problem I think the only solution would be to change the way we write numbers entirely. I have described how this could be done in an article for Danish gymnasium math teachers. The article can be found here:

<http://www.harremoes.dk/Peter/talnot.pdf>

The basic observation is that if one stopped using 9 and instead introduced some new symbol to denote -1, then one could represent both positive and negative numbers in the positional system. Although article is in Danish, but I guess you will be able to extract the main idea. I think the benefit of changing our notation for number would be overwhelming, but I do not see how one could introduce such changes."

En zie vervolgens wat ervan kwam:

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/08/30/taking-a-loss>

Stuur maar op wat jij had verzonnen.

Cheers,

Thomas

At 2014-08-31 19:04, JB wrote:

Dag Thomas, ik wil wel weten wat PvH over de breuken meldt. Ik probeer overigens zijn boek wel te kopen. Dat je axiomas makkelijk in algebra leert dan in meetkunde is tamelijk evident. Het simpelste systeem voor de meetkunde van Hilbert heeft geloof ik 23 axioma's de Grieken hadden er 5. Zo iets is er in de algebra niet geweest. Algebra kan met vergelijkingen, meetkunde niet voor zover mij bekend.

Het gaat hier vooral om het voorwerk voor de niveau-sprong.

Heeft deze Harremoes een echte paper over rekenen met H? Ik heb toevallig twee maanden gelden een reeks verschillende manieren om minus te specificeren

¹⁹ Email PH to TC. I really wonder whether it would be wise to follow up on PH's system.

bekeken en het viel me op hoe complex dat eigenlijk is. Best opmerkelijk dat men dat kinderen zomaar kan leren. Uiteindelijk heb ik iets dat goed genoeg werkt, het kan denk ik niet veel beter, maar het blijft een keuze uit veel varianten. De complicaties hebben alle met het positiestelsel te maken natuurlijk, in unaire notatie is de zaak inderdaad triviaal. mvg, Jan ____

At 2014-08-31 20:03, JB wrote:

Dag Thomas, mijn verhaal Met Alban Ponse staat op arXiv: <http://arxiv.org/pdf/1406.3280.pdf> Het is nu redelijk uitgewerkt in die zin dat we alle literatuur die we konden vinden er wel bij hebben geslept. Dit volgt inmiddels klassieke theoretische informatica: in tabel een een algebraïsche specificatie van natuurlijke getallen met unaire (successor notatie), binaire en decimale notatie. De vergelijkingen kan men van links naar rechts lezen en toepassen en een gesloten term reken altijd door naar een successor term (aantal malen S(-) toegepast op 0). Het systeem is terminerend en confluent (reken houdt altijd op en altijd in dezelfde normaalvorm). Vervolgens komen er negatieve getallen bij (Tabel 2, dat spreek al niet meer vanzelf, er zijn allerlei mogelijkheden om dit te doen, maar korter en duidelijker dan zo hebben we niet kunnen vinden.) De rest van de paper specificeert het zelfde abstracte datatype nog enkele malen, maar dan zo dat de normaalvormen binaire of decimale notaties hebben. Tabel 8 plus Tabel 9 levert het "optimale" systeem; in sectie behandelen we een opmerkelijk type van specificatie waarin de decimale cijfers in een boom zitten in plaats van een lijst. Je krijgt mooie vergelijkingen, maar het is ons conceptueel toch te ingewikkeld.²⁰ Het systeem in tabel 14 en 15 doet het naar men zegt op de computer overigens heel snel, en dat voor onbeperkt lange decimale expressies.²¹ Het verhaal van PvH zegt me weinig. Natuurlijk kun je ook met $a \cdot b^{-1}$ rekenen, dat heeft voordelen en nadelen,²² ik heb daar uitgebreid aan gewerkt (b.v. <http://arxiv.org/abs/0907.0540>) maar PvH meldt niets nieuws en zijn bewering dat met die axioma's het rekenen wordt vastgelegd geldt niet voor de rationale getallen, was het maar zo eenvoudig.²³ Dat heb ik samen met John Tucker voor het eerst bereikt in <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1219095>.²⁴ Daar gebruiken we $1/0 = 0$ en wie daar tegen is mag iets anders bedenken ($1/0 = 1$ werkt ook, maar moeizamer, recent uitgezocht in <http://arxiv.org/abs/1406.2092>) en moet dan nog heel hard werken. Wie $1/0$ ongedefinieerd laat komt er nauwelijks meer uit.²⁵ PvH weet dat kennelijk niet maar het slag van axioma's dat hij noemt vraagt ook meestal om een keuze voor $1/0$, b.v. $1/0 = 17$, of wat dan ook, want anders is er een driewaardige logica nodig en daar zat PvH vast niet op te wachten.²⁶ De bewering dat je met deze axioma's goed leert wat axioma's zijn is onhoudbaar!²⁷ Door de complicaties niet te bespreken verdwijnen ze niet. mvg Jan Maar wat PH doet met z^n H in jouw notatie is helemaal anders. Ik zie nog niet hoe optellen en vermenigvuldigen dan werkt maar er zit zeker iets in. Dat de 9 dan niet meer voorkomt is voor de leerling niet bepaald praktisch maar zo zij het.²⁸

²⁰ Surprisingly, unaware of JB & Ponse, I came upon the similar notion to allow to rewrite -123 as $[-1][-2][-3]$ and allow kids at elementary school to work with this, which will greatly simplify problems in subtraction, see <http://boycottholland.wordpress.com/2014/08/30/taking-a-loss>

²¹ Is this a report on an existing system that JB only describes, or has the computer program been created to test his definition of the system?

²² This again shows that JB has little awareness of the educational context and Van Hiele levels of understanding. The suggestion by Van Hiele is not presented as an innovation of mathematics, since that would be extremely silly. His point is to see the advantages and disadvantages for education. See the paper on the quotient.

²³ But the idea of Van Hiele was to present something simple that students could work with.

²⁴ That claim "for the first time" does not seem warranted. Arithmetic exists already for a while, while it is generally accepted that Peano gave the first axiomatic system.

²⁵ Why is that? See the paper on the quotient.

²⁶ First, this gives a wrong presentation of Van Hiele's chapter. It clearly looks for educational use. Secondly, it suffices to say that division by zero is impossible. See the GIL in the quotient paper.

²⁷ The claim "learning well" is ambiguous and neglects the role of Van Hiele levels of understanding. The axioms may be proper for what is possible in SM. That they are insufficient for RM is a different issue.

²⁸ JB's mentioning of these papers caused me to look at them and include some responses in the paper on the quotient.

At 2014-09-04 19:52, TC wrote:

Hi Jan,

Hier een tekstje over breuken met a^H :

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/09/04/with-your-undivided-attention>

Ik heb een poging gedaan t.a.v. je eerste aangehaalde paper. Dit is niet mijn tak van sport, maar e.e.a. roept herinneringen op, dus laat ik een poging wagen:

At 2014-08-31 20:03, JB wrote:

Dag Thomas, mijn verhaal Met Alban Ponse staat op arXiv:

<http://arxiv.org/pdf/1406.3280.pdf>

(1) Typefoutje Table 2

$0 + x = 0$ [u8]

(2) $S(-(S(x))) = -x$ [u6]: Als het even kan zou ik $S(P(x)) = x$ eleganter vinden - zie [u4]

Voorzover ik kan zien geven jullie geen bewijzen waarom een bepaalde regel nodig / handig zou zijn.

(3) p3: In Mathematica is Append toevoegen aan het eind, en Prepend is toevoegen aan het begin. Jullie hebben het met 975 andersom. Maar getallen lezen van links naar rechts Toch, wanneer je die volgorde van getallen vasthoudt, dan zou ik de woordkeus van Mathematica aanhouden. Maar ja, als Append al is ingeburgerd voor "Prepend", dan zou je ook PostPend kunnen gebruiken voor "Append", als je begrijpt wat ik bedoel.

(4) p9: itselfare -> itself are

(5) p11: Ik begrijp dat mijn vondstje van $-1234 = [-1][-2][-3][-4]$ door jou een boom met semantiek (ipv syntax) wordt genoemd. Inderdaat laat ik een bewerking $2[10-4]2 = 262$ toe, en vragen jullie je af of zoiets handig is: zeer zeker !

(7) [17: "Of course, a decimal notation as 689 is so common that one usually does not question whether it represents $(6 : d 8) : d 9$ or $(6 \wedge d 8) \wedge d 9$ or some other formally defined notation."

Dit is een beetje mijn begripsmatig haakje om naar het paper te kijken: ²⁹

(a) Ik denk dat het positionele systeem een heldere definitie heeft: $d[0] + d[1] 10 + d[2] 10^2 + \dots + d[n] 10^n$, voor $d[i]$ een digit en $n \geq 0$.

(b) Een wiskundig formele definitie van rekenkunde $(0, S, \text{regels})$: bijv. Peano, of later groupentheorie (maar daar weet ik te weinig van). Voor het onderwijs (VO) lijken die axioma's van Van Hiele wellicht wel bruikbaar.

(c) Voor de informatica gelden randvoorwaarden (a) en (b) wat de getallen moeten zijn. Dus jullie stelling op p17 klopt niet.

(d) Voor de informatica begrijp ik dat men zoekt naar snelle manieren om $a + b$ of $c * d$ uit te rekenen en ook te herschrijven. Informatica voor computers is een andere tak van sport (onderscheid ' en S ?) dan informatica voor het onderwijs, waarin kinderen moeten leren hoe

²⁹ For education, this representation of the decimal system is much more useful than JB & Ponse's representation for Computer Science. Indeed JB & Ponse acknowledge that one has to understand the positional system before their paper may be understood: "Understanding the concept of a commutative ring can be expected only from a person who has already acquired an understanding of the structure of integers and who (...)" p16.

het positionele systeem werkt, en voor kleine getallen trage algoritmen kunnen gebruiken die aansluiten bij het begrip, en voor grote getallen moeten leren omgaan met rekenmachines. Er is natuurlijk overlap: ook kinderen moeten de digits leren, en kunnen zoals machines in een oneindige loop komen. Toch is het doel anders. Jullie duiden er al een beetje op dat men het getsysteem eigenlijk al moet kennen om het paper te begrijpen

(e) Je onderzoek zou voor het onderwijs bijv. het meest nuttig zijn wanneer je aannemelijk maakt dat vanuit de informatica een algoritme zoals voorgesteld in de laatste tabel laatste kolom, t.a.v. 753-491, inderdaad is toegestaan, en ook efficient is. Dit is voor leraren wiskunde alleen begrijpelijk wanneer je de vaktaal laat vallen, verwijst naar (a) en (b), en uitlegt dat het positionele systeem vanuit de informatica ook als boom kan worden opgevat.

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/08/30/taking-a-loss>

Zoiets ?

Met groet,

Thomas

At 2014-09-04 23:44, TC wrote:

Hi Jan,

Toch weer de meadows

Ik ben hier niet thuis in. Het kostte weer even tijd om te achterhalen dat de re-ele getallen een "veld" heten, dat commutative ringen waar jij een meadow van maakt juist geen a^H hebben, maar dat jij er een toevoegt. Een beetje zoals de generaliseerde inverse in matrix theorie. Niet $x * x^H = 1$ maar $(x \cdot (x \cdot x^H) = x)$, met als ik goed begrijp $H = -1$ voor de inverse meadow en $x^H = 1/x$ met H zonder waarde voor de divisive meadow.

Voor de aardigheid heb ik nog gekeken of ik ($a \cdot 0 = 0$) kon bewijzen uit de aannames van het veld, en dat kostte toch ook weer moeite.

Hieronder "een gek kan meer vragen dan tien wijzen kunnen beantwoorden":

(1) Wat ik aan je artikel lastig vind, is dat je niet expliciet laat zien wat dan het verschil is tussen een veld en een weide. Ja, $0^H = 0$, maar hoe, wat waarom, dan ? Dus door alleen maar stellen (p8) "The equation $0^{-1} = 0$ is derivable from the equations EiMd" stuur je lezers zoals ik het bos in. Ik wil graag die afleiding zien, en een uitleg waarom het hier wel lukt en waarom niet in een veld

(2) En het zou natuurlijk ook nuttig zijn om als leek een beeld te krijgen van wat in een veld wel kan maar niet in een weide. Wellicht is het mooi dat "deling door nul" nu wel kan, ook al is het dan niet hetzelfde als in een veld, maar wat is de prijs die ervoor betaald wordt ?

(3) Een vraagje: Voor een veld zou afleidbaar moeten zijn dat $x^a * x^b = x^{(a+b)}$ zodat de weg openstaat om $H = -1$ af te leiden. Waarom gaat dat niet in een divisive weide ?

(4) Op deze webpagina geef ik deze afleiding:

<http://boycottholland.wordpress.com/2014/09/04/with-your-undivided-attention>

For example, from addition and subtraction we already know that $H H = 1$.

Theorem: $H^H H = H$.

Proof: Take $a^H H = 1$, substitute $a = H$, get $H H^H H = 1$, multiply both sides with H , get $H H H^H H = H$, and thus $H^H H = H$. Q.E.D.

It remains to be tested empirically what kids can follow this.

Waarom zou in een divisive meadow niet gelden dat $-1 * -1 = 1$, en $1 / -1 = -1$ maar ook afleidbaar dat $(-1)^{(-1)} = -1 = 1 / -1$, en vervolgens op algemene wijze $x^{(-1)} = 1 / x$, zodat er dan geen verschil is met inverse meadow ?

(5) Misschien een kern in deze afleiding $1 = 0$

(i) In ieder geval heb je $(x \cdot (x \cdot x^H) = x)$

(ii) Maar ook $x \cdot 1 = x$.

(iii) Waarom dan niet de conclusie voor het middenstuk: $x \cdot x^H = 1$?

Want dan geeft $0^H = 0$ ook de conclusie $0 * 0 = 1$, en dat wil je waarschijnlijk wel vermijden.

Hoe komt het dat je van (i) en (ii) niet naar (iii) kunt ? Zomaar zeggen dat het niet kan, dat het nog niemand gelukt is, lijkt flauw.

Wanneer ik mag machtsverheffen: neem $y = x \cdot x^H$, links en rechts met x^H vermenigvuldigen, en haal eventueel de macht H eruit: ³⁰

(w 1) $x \cdot (x \cdot x^H) = x$

(w 2) $x^H \cdot x \cdot (x \cdot x^H) = x^H \cdot x$

(w 3) $y (x \cdot x^H) = y$ or $y (x^H x)^H = y$

(w 4) $y y = y$ or $y y^H = y$

(w 5) $y = 0$ or $y = 1$ (and deduce contradiction if this is not the case) ³¹

(w 6) $y = x \cdot x^H = 0$ or $y = x \cdot x^H = 1$

(w 7) $x \cdot x^H = 1$ gives $0 * 0 = 1$ so $0 = 1$ which we regard as a contradiction ³²

(w 8) $x \cdot x^H = 0$ gives $1 * 1 = 0$ so $1 = 0$ which we regard as a contradiction

(6) Hieronder nog enkele opmerkingen bij citaten uit het stuk. ³³

Met groet,

Thomas

=====

p19:

"Returning to $(Q \setminus \{0\}) / 0$? M

d

, the question remains whether the equation

$0 / 0 = 0$ is natural. The total cost C_n

of producing n items of some product is

often viewed as the sum of a fixed cost FC and a variable cost VC_n

. Moreover,

³⁰ This argument is included in the quotient paper.

³¹ Such a contradiction can be derived e.g. (a) when $y y^H$ is integer, or (b) naturally for an ordered field. In the my reasoning at this time, I am thinking in the context of an ordered field, without explicitly wanting to use its property that it has order

³² The error in these two steps is to neglect that $y = y[x]$. In truth: if $y = 0$, it is because of $y[0]$, so that $x = 0$, and then $x = 1$ cannot be used. The paper contains a warning against this error.

³³ These comments have been included in the paper.

for $n = 1$, the variable cost VC_n of producing n items is usually viewed as n times the marginal cost per item, taking VC_n / n as the marginal cost per item. For $n = 0$, the variable cost of producing n items and the marginal cost per item are both 0. This makes the equation $VC_0 / 0 = 0$ natural."

I am sorry: The marginal cost would be $d(VC[n])/dn$, and normally it would not be zero at $n = 0$.

Even if you take $VC[n] = v n$, for constant marginal cost, then $v <> 0$ at $n = 0$.

=====

p21: "This indicates that the absence of the additive inverse operator allows a typing based solution to problems related to "division by zero" in elementary school mathematics. So there may be a point in dealing first and thoroughly with nonnegative rational numbers in a setting where division by zero is not defined.

Working in \mathbb{Q}

ia

simplifies matters even more because there is no distinction between terms and defined terms. Again, this may be of use in the teaching of mathematics at elementary school."

Misschien nog even in leektaal vertalen ?

=====

p24: "also the truth value of $0 = 0 \vee 0 / 0 = 1$ is T "

Jullie vinden dat laatste niet conform de wiskundige praktijk, maar de logica klopt wel. Wanneer $0 / 0$ niet gedefinieerd is en $0 / 0 = 1$ derhalve niet waar, dan is de uitdrukking nog steeds waar, want $0 = 0$.

In Mathematica is geeft test "Indeterminate == 1" gewoon False (met mooie software om patronen te herkennen). Dit is inderdaad wel predicaat logica en niet alleen propositionele logica.

Het was leuk om iets over deze logica te lezen. Ken je mijn "A logic of exceptions"?

Mijn driewaardige tafels verschillen van die in de literatuur zoals Kleene. Maar die hebben jullie niet nodig, zie boven.

=====

At 2014-09-04 23:56, TC wrote:

Hi Jan,

At 2014-08-31 20:03, JB wrote:

Het verhaal van PvH zegt me weinig. Natuurlijk kun je ook met $a \cdot b^{-1}$ rekenen, dat heeft voordelen en nadelen, ik heb daar uitgebreid aan gewerkt (b.v. <http://arxiv.org/abs/0907.0540>)

Ik heb daar net op gereageerd. Ik wilde het eerst checken / begrijpen voor ik de nuancering op het weblog opneem.

Ja, dat je met x^H kan rekenen, staat me nog vaag bij van mijn colleges wiskunde en logica. Maar, het punt is dat PvH het toegankelijk wil maken voor de lagere school !

maar PvH meldt niets nieuws en zijn bewering dat met die axiomas het rekenen wordt vastgelegd geldt niet voor de rationale getallen, was het maar zo eenvoudig. Dat heb ik samen met John Tucker voor het eerst bereikt in <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1219095>.

Ik denk dat PvH bewust e.e.a. vergemakkelijkt heeft weergegeven, voor de doelstelling van zijn artikel. De schoolwiskunde zal toch weer verschillen van jouw axomatiek. De enige vraag die hier geldt is of het onderwijs inzichtelijker wordt, leerbaarder, en voor de leerlingen leuker, sneller, met grotere competentie: en daadwerkelijk betere beheersing van wiskunde.

Daar gebruiken we $1/0 = 0$ en wie daar tegen is mag iets anders bedenken ($1/0 = 1$ werkt ook, maar moeizamer, recent uitgezocht in <http://arxiv.org/abs/1406.2092>) en moet dan nog heel hard werken. Wie $1/0$ ongedefinieerd laat komt er nauwelijks meer uit.

Hoezo ? Mathematica is blijkbaar heel sterk in computer algebra. Maar, deze laatste twee artikelen nog bekijken.

PvH weet dat kennelijk niet maar het slag van axioma's dat hij noemt vraagt ook meestal om een keuze voor $1/0$, b.v. $1/0 = 17$, of wat dan ook, want anders is er een driewaardige logica nodig en daar zat PvH vast niet op te wachten.

Ik denk dat hij meer wist dan je nu stelt, maar, hij zal jouw artikelen in 1973 nog niet gekend hebben. Maar dat was voor zijn didactisch voorstel denkelijk niet nodig.

Zie mijn vorige email t.a.v. <http://arxiv.org/abs/0907.0540> dat je stelling t.a.v. driewaardige logica niet klopt.

De bewering dat je met deze axioma's goed leert wat axioma's zijn is onhoudbaar! Door de complicaties niet te bespreken verdwijnen ze niet. mvg Jan

Pas op: "goed leren" ? We praten hier over de brugklas, met het begin van nadenken over formaliseren ! Kijk nog eens naar de Van Hiele niveaus !

Nee, het argument was niet dat het allemaal in Van Hiele staat en dat de univ's opgeheven kunnen worden

Maar wat PH doet met $z'n H$ in jouw notatie is helemaal anders. Ik zie nog niet hoe optellen en vermenigvuldigen dan werkt maar er zit zeker iets in. Dat de 9 dan niet meer voorkomt is voor de leerling niet bepaald praktisch maar zo zij het.

Ja, anders, maar ik heb al veel geleend, door HT0 als getal op te voeren ... Peter Harremoes zei dat je best 9 kunt invoeren, maar dat er dan geen unieke notatie voor getallen meer is. Dat lijkt toch wat lastig voor het uit je hoofd leren van tafels en toch steeds moeten nadenken over een andere notatie.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-05 09:16, JB wrote:

Dag Thomas,

1) de paper is geen inleiding in de meadows, dat was al enkele malen eerder gebeurd en steeds weer dezelfde intro publiceren dat wordt dan dat bekende zelfplagiat waar een mens toch mee op moet passen. De spelregels zijn niet heel duidelijk, maar ik probeer steeds weer de zelfherhaling te bestrijden. Dat geldt b.v. voor het bewijs van $0^{\{-1\}} = 0$ dat geloof ik al op drie eerder plaatsten staat te beginnen in de paper met John Tucker in de JACM.

2) Field in NL is lichaam, wij volgen daar het Duits (Koerper) (en ook het Frans btw). De vertaling weide voor meadow gebruik ik ook. Maar machtsverheffing aan een lichaam toevoegen is een heel probleem. Dan kom je in volstrekt andere theorie uit, daar is mijn jaargenoot Lou van den Dries (Chicago) een crack in en het lijkt nauwelijks meer op ringen en lichamen. Die stap zetten we bewust niet. Om maar wat te noemen, je krijgt 0^{-1} = de wortel uit 0^i en Joost mag weten wat dat voor iets is (dit soort van issue is al van de 19e eeuw).³⁴

3) In het hele verhaal zit algemeen machtsverheffen niet, dus in een divisve meadow heb je juist geen x^{-1} , en valt daar dus ook niks over te zeggen.³⁵

mvg
Jan

At 2014-09-05 16:00, TC wrote:

Hi Jan,

[Attachment: New draft Sky-Field-Meadow]

(1) Ik heb Bergstra & Tucker (2007) gevonden, met die afleiding $0^H = 0$. Nuttig om dit gezien te hebben. Ik kan me voorstellen dat je je niet wilt herhalen, maar een verwijzing kan dan uitkomst bieden.³⁶

(2) Het is nuttig dat ik nu toch een beeld heb gevormd t.a.v. het mogelijk nut van de weide t.a.v. de afgeleide. Je zei al dat het niet aan de orde was (of termen in die richting) maar ik heb nu kunnen vaststellen dat dit inderdaad zo is. Zie bijgaand, waar natuurlijk nog een dankwoordje bij hoort.

(3) OK, geen machtsverheffen, maar Bergstra & Tucker staan wel $(y x)^H = y^H x^H$ toe, voor abstracte H voor inverse. Dan levert onderstaande afleiding toch wel degelijk $1 = 0$ op. Ik heb dit ook in bijgaande tekst verwerkt. Commentaar ? Wat zie ik verkeerd ?

(4) Waarom zou je onderscheid maken tussen inversive en divisive meadow, wanneer H eigenlijk abstract is, want er is geen goed uitontwikkeling van machtsverheffen ? Het lijkt erop dat je laat leiden door de getalswaarde -1 terwijl het toch alleen maar een notatie voor een inverse is ... ?

(5) Volledigheidshalve zou ik ook enig ander onderstaand commentaar kunnen opnemen.

Met groet,

Thomas
[included At 2014-09-04 23:44, see above]

At 2014-09-05 22:53, TC wrote:

Hi Jan,

Daar heb ik zowaar deze mooie vrijdagavond nog zitten rommelen om mijn diverse opmerkingen uit de emails te verzamelen en in dit aangepaste concept te krijgen. Wanneer ik e.e.a. nog niet begrijp hoor ik het graag.

[Attachment: New draft Sky-Field-Meadow]

³⁴ 0^i is Indeterminate in Mathematica. Anyhow the working with i is tricky. One better uses {0, 1}. For example: $-1 = i^2 = \text{Sqrt}[-1] * \text{Sqrt}[-1] = \text{Sqrt}[-1 * -1] = \text{Sqrt}[1] = 1$.

³⁵ This is a formal argument. When it is just another way of writing the same thing, then there is no material difference. Suppose I have system $\langle A, 1/x \rangle$ and system $\langle A, H \rangle$. JB claims that these are formally different, and both have to be studied. But this is creating jobs for mathematicians without much sense. The comment is in the quotient paper. An overall conclusion is that mathematicians better look into the use of computer algebra, in particular for use in school.

³⁶ The reference is in the paper.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-06 16:53, JB wrote:

Dag Thomas, het is verre van eenvoudig om op jouw stuk zinnige kritiek te leveren. Eigenlijk kan ik het niet. op de achtergrond zit achter elke wiskundige tekst en achter elk onderdeel ervan een risicoanalyse: klopt het of klopt het niet. En dat is voor mij in jouw tekst onvoldoende herkenbaar. Ik wil graag geloven dat de meadows niet bruikbaar zijn bij de definitie van de afgeleide³⁷ maar wat je schrijft is bewering in een vorm die weerlegbaar is. LES³⁸ is in logische zin een heel gecompliceerde bewering,³⁹ dat maakt 'm moeilijk in het gebruik. De machtsverheffing in en field is juist in de wiskunde problematisch, dat is geen zaak van computer science.⁴⁰ Een meadow kan triviaal zijn ($0 = 1$) SEP is daarom geen axioma voor meadows. De wereld van lichamen komt de successor nooit voor want $S(x) = x+1$ levert die functie al op.⁴¹ S is pas van belang als het over termherschrijven gaat en dat doen de wiskundigen nauwelijks. Op p4 zie ik stap v4 niet. Daat staat na gebruik van RIL gewoon $X \neq 0 \rightarrow X \cdot X^{-1} = 1$ en dat geldt in de cancellation meadows maar niet in alle meadows.⁴² De meadows hebben ook geen impliciete LES. Dat is gewoon niet in alle meadows waar. Deze sectie zou er op vooruitgaan als er een duidelijke bewering is die je met de argumenten onderbouwt. Nu kan het steeds weer alle kanten uit.⁴³ Relevant is hier dat rekenen modulo 6 een meadow levert (en modulo elk kwadraatvrij natuurlijk getal), terwijl rekenen modulo 4 juist geen meadow levert. Rekenen modulo 6 levert geen lichaam, daar zit het overduidelijke verschil tussen lichamen en meadows. Rekenend modulo 6: als $3 \cdot 3^H = 0$ dan $3 = 3 \cdot 3 \cdot 3^H = 0$, en als $3 \cdot 3^H = 1$ dan $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 3^H = 6 \cdot 3^H = 0 \cdot 3^H = 0$. Beide onjuist modulo 6. Toch is Ril wel juist modulo 6 (maar niet modulo 4!).⁴⁴ Deze dingen staan allemaal in de eerste TCS paper over meadows. Peit Rodenburg en Inge Bethke zijn er nog op verder gedaan en hebben een exacte karakterisering van eindige meadows gegeven. Op p5 beschrijf je de partiele logica voor ee setting waarin $1/0$ niet gedefinieerd is. Ik denk dat dit redelijk dicht bij de schoolintuities ligt maar de logica ervan is zo gecompliceerd. In die logica is $X = X$ niet meer waar.⁴⁵ Daaronder sta je voor de vraag of het niet anders kan en bottom line komt dat neer op wat men short circuit logic noemt. ook heel ingewikkeld, heb ik met Alban Ponse al weer vele jaren aan gewerkt. En hij heeft er al 4 afstudeerders van de master of logic op gehad, we zijn daar langzaam maar wel vrij goed in. Maar ook dat is opmerkelijk ingewikkeld. Computer algebra kan op allerlei manieren en termerschrijven is daar een belangrijk thema geworden. M.i. doet computer algebra geen uitspraak over zoiets als delen door nul,⁴⁶ men kan rekenen vanuit de uitgangspunten die je wilt aannemen dus ook in een meadow. Wat betreft het onderwijs, mijn overtuiging op dit moment is dat de common meadows (zie <http://arxiv.org/abs/1406.6878>) er nog het dichtst bij komen.⁴⁷ In mijn pogingen om dat deel van de schoolwiskunde opnieuw staan de common meadows centraal. Maar om de common meadows te begrijpen was wat mij betreft de tussenstap van de eerdere meadows noodzakelijk. Common meadows is wat directe toepassing van de theorie van abstracte dataypen oplevert. War we nu aan werken is de mix van common meadows en

³⁷ Did not say that: as an alternative like the dynamic quotient.

³⁸ Logical Exception Switch – now in the paper without abbreviation

³⁹ Testing on something not being zero might require the solution of Golbach's conjecture and such. But this is a RM problem and not for SM.

⁴⁰ JB assumes a difference between $1/x$ and x^H and this need not be, if you take them the same.

⁴¹ This is somewhat strange. Having $x + 1$ is not directly meaningful, and does not imply succession. S introduces order.

⁴² The table says that this step can only be taken if it is allowed.

⁴³ This has been clarified by mentioning in the paper that it is only interested in ordered cases.

⁴⁴ I have not persued to fully understand how this works since I am interested in SM with reals.

⁴⁵ I do not follow this. It does not seem relevant for SM. The point of the article is to explain SM to RM, and not to explain RM to SM.

⁴⁶ There are various systems of computer algebra. Mathematica has $1/0 \rightarrow$ Indeterminate. But, in suggesting that RM looks more into computer algebra, I do not mean to suggest that this is a well established field with conventions and such. I just indicate the area and usefulness for school.

⁴⁷ The common meadow now gets an appendix in the paper. If $(x^H)^H = x$ however, then $\hat{a} = 0$ however, so there must be an exception switch.

decimale notatie. Op het oog triviaal, in de praktijk maanden lang werk en een grote zoekpartij naar de goede vergelijkingen. We zijn over de helft van dat werk oop ik. mvg, Jan

At 2014-09-08 12:09, TC wrote:

Dag Jan,

Gooi dat vorige concept en zijn update maar weg, want mijn afleiding $1 = 0$ klopte niet. Mijn fout was $y = x.x^H$ lokaal te behandelen als onafhankelijk van x maar het blijft natuurlijk $y[x]$. Ik leg die fout uit in de bijlage van deze pdf die nu op mijn website staat: ⁴⁸

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Mijn conclusie is dat het meadow met $1 / 0$ niet bruikbaar is voor wat ik met het dynamisch quotient beoog. Derhalve gaat hetgeen ik over het meadow schreef naar bijlagen, behalve sectie 2 over de "exception switches" of "cancellation rules".

De kern van het bovenstaand artikel is een afronding van mijn concept-artikel uit 2012, dat gebruik maakte van onze discussie en waarin ik al een "sky" boven field / meadow voorstel. Nederlands: lucht (en niet hemel).

Je voorbehoud / risico-analyse over wat ik over field / meadow schrijf is op zijn plaats want van het meeste snap ik weinig. Practisch mag je ervan uitgaan dat ik jouw veronderstellingen aanneem, waar die ook nog verschillen per artikel en paragraaf, en hopelijk heb ik het goed bijgehouden.

Ik weet niet of je nog tijd hebt voor het hoofdbestanddeel van het artikel. Wanneer je nog zou willen kijken naar een goede weergave van de meadows in section 2 en bijlagen A en B, dan heel graag.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-06 16:53, JB wrote:

Dag Thomas, het is verre van eenvoudig om op jouw stuk zinnige kritiek te leveren. Eigenlijk kan ik het niet. op de achtergrond zit achter elke wiskundige tekst en achter elk onderdeel ervan een risicoanalyse: klopt het of klopt het niet. En dat is voor mij in jouw tekst onvoldoende herkenbaar.

At 2014-09-09 10:24, JB wrote:

Dag Thomas, dit gaat in stappen: - in je abstract wek je de indruk dat ZPR en (involutive) meadows elkaar moeilijk verdragen, maar dat is niet zo, in de meadows die expansies zijn van en lichaam geldt ZPR. (ZPR te eisen is een andere formulering van wat wij cancellation meadows noemen.) ⁴⁹ Het verschil met een lichaam is dan nog steeds groot: in een lichaam is er geen functienaam voor inverse er is alleen een axioma dat het bestaan van elementen onder condities vereist. Maar dat is heel wat anders dan een functie die die waarde oplevert. Een meadow kan niet "collapse to a field", een meadow die op een field lijkt is een expansie van een field (expansie levert extra functie of constante). Het feit dat er meadows zijn die geen expansie van een lichaam zijn is voor de theorie van belang maar voor de toepassingen in het onderwijs irrelevant. Daar gaat het om de beschikbaarheid van het functiesymbool, iets wat het lichaam niet levert. De "some a^H " uit de common meadows is niet vrij te kiezen, het is echt een error element in de zin van de abstracte dataypen. ⁵⁰ Ik houd dezelfde problemen als vorig jaar met je definitie van x/y . En ik meen nog steeds dat jij er wat aan kan hebben

⁴⁸ Henceforth updates have the same weblink but the time-stamp is in the version itself.

⁴⁹ I wonder whether this is try. This holds for ordered fields, but for any field ?

⁵⁰ This important clarification is also in the abstract of Bergstra & Ponse (2014).

om het als volgt te bekijken: begripsproblemen die een tekst een lezer oplevert zijn primair echte problemen met de tekst, niet bewijzen van incompetentie van de lezer.⁵¹ Dus ik heb nodig een definitie van x/y . Zonder dat kom ik echt niet verder in het verhaal. Kun je geen definitie geven lever dan een aantal voorbeelden zodat een lezer zelf kan proberen de definitie te geven. Maar nu doe je het voorkomen alsof het idee dat je wilt overdragen er staat en dat is m.i. uitdrukkelijk niet het geval. mvg, Jan

At 2014-09-09 15:46, TC wrote:

Hi Jan,

Ik neem aan dat je al zo'n bewijs kent maar ik zag het nergens of herkende het niet:

Theorem for Q: $(SEP \ \& \ CR \ \& \ SIP) \Rightarrow (RIL \text{ is equivalent to } GIL)$

Zie bijgesloten pagina. Akkoord ?⁵²

PM 1. In Bergstra & Tucker 2007 p8 LEMMA 2.5 zeggen jullie wel dat $(GIL \ \& \ 0^H = 0)$ leiden tot RIL maar niet het omgekeerde. Waarom niet ?

PM 2. Idem p 17: "Now Ril is derivable from CR U SIP U Sep U Gil and for that reason CR U SIP U Ril is a weaker theory". Eerder hadden we inderdaad $CR \ U \ SIP \Rightarrow 0^H = 0$. Dus $(GIL \ \& \ 0^H = 0)$ geeft RIL. Maar het omgekeerde toch ook, behalve wellicht SEP ? Maar ik neem aan dat sowieso SEP want het moet niet triviaal worden. In dat geval $SEP \ \& \ CR \ \& \ SIP \Rightarrow (RIL \text{ is equivalent to } GIL)$ en dus niets "weaker" ?

PM 3. In Bergstra & Tucker 2007 p5 definiëren jullie Q0 met $(x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x^H = 1, \text{ anders } 0^H = 0)$. Dus op p12 kunnen jullie zeggen $Q0 \models GIL$. Maar je zou toch ook met RIL kunnen ?

PM 4. Op p18 LEMMA5.3 over priemgetallen: maar waarom zo moeilijk als al $x \cdot x^H = 1$ geldt (met GIL) ?

PM 5. Op p22: Definition 5.12. "A model of CR U SIP U Ril is called a meadow. All fields are clearly meadows but not conversely (as the initial meadow is not a field). In fact, the theorem proves a normal form theorem for meadows." Maar CR U SIP geven $0^H = 0$ en dus we zijn terug bij PM 2. Het is me dan niet duidelijk waarom het "initial" geval van de integers voor CR ook opgevat wordt als geldend voor SIP terwijl de integers alleen geen inverse hebben (want $1/2$ is geen integer).

PM Final. Ik kijk nog naar je andere opmerkingen. Onze discussie over de dynamische quotient was overigens in 2012 en niet in 2013.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-09 23:01, JB wrote:

Dag Thomas, de bewering $(SEP \ \& \ CR \ \& \ SIP) \Rightarrow (RIL \text{ is equivalent to } GIL)$ is niet waar. B.v rekenend modulo 6 is dit niet juist. In het bewijs gebruik je een ordening, maar $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ laat zich niet ordenen. Maar ook in een setting van geordende meadows die aan SEP voldoen hoeft GIL niet te gelden, je resultaat is niet ok m.i.⁵³ PM1 die omkering geldt niet. PM2, SEP is

⁵¹ I agree with that "primarily" but after multiple explanations and confirmation on other points (such as Van Hiele) that the reader is not familiar with SM, it is fair to conclude that this is the cause.

⁵² In the second subsequent email JB agrees, as described in section 2g. The crux lies in the ordering for Q. My focus has always been on the reals (of which Q forms a skeleton).

⁵³ Retracted in the next email.

zeker niet triviaal, b.v. omdat het een negatieve bewering is kan ie niet uit een stel vergelijkingen volgen.⁵⁴ Dit heeft m.i. ook relevantie voor de andere opmerkingen. mvg, Jan

At 2014-09-10 17:15, TC wrote:

Hi Jan,

Ja, maar ik schreef "For Q". Ik heb dat nu verhelderd met "For (Q, <)" om beter aan te geven dat de ordening gebruikt wordt.

Dat je schrijft "Maar ook in een setting van geordende meadows die aan SEP voldoen hoeft GIL niet te gelden" verbaast me dat. Want met die ordening ontstaat toch een field? Waar gaat mijn bewijs fout?

Het lijkt erop dat je GIL beschouwt als een verbod voor $0^H = 0$. Maar toevoeging $GIL[0] = GIL \ \& \ (0^H=0)$ verandert niets aan het field, want 0 was al als element bekend. En $(0^H)^H = (0)^H = 0$ via gewoon substitutie, dus je hebt ook je uitbreiding van SIP3 zonder problemen.

Hier is de aangepaste versie, oude locatie, met update:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Het zou het scherpst zijn wanneer je aangeeft waarin het bewijs fout gaat. Of, een voorbeeld geven van een geordend meadow (met noodzakelijk oneindig elementen) dat toch geen field is.

PM. Ik zei niet dat SEP triviaal was. Ik zei triviale lichamen en weiden te willen vermijden.

In Sectie 4 van het paper heb ik nog eens geput uit de correspondentie van 2012 en jouw bezwaren genoemd, en hoe die opgelost kunnen worden. Wanneer je ook daar nog eens naar zou willen kijken met een fris oog?

Met groet,

Thomas

At 2014-09-10 23:55, JB wrote:

Dag Thomas, inderdaad, ik wist niet dat een geordende niet-triviale meadow aan GIL. Het bewijs kan in 2 regels: als x niet 0 is en x/x is niet 1, dan hetzij $x/x < 1$ of $x/x > 1$. De gevallen zijn symmetrisch, neem aan $x/x < 1$, dan $1-x/x > 0$. Als $x > 0$ dan $0 = x \cdot (1-x/x) > 0$, anders $0 = -x \cdot (1-x/x) > 0$. In jouw bewijs begrijp ik de rol van N niet, maar de observatie is zeker van belang.⁵⁵ Verder: waar in je verhaal staat wat een Sky is? Ik kon het niet vinden. Toch zeg je enkele malen dat het er staat. Hoe moet ik dat begrijpen? Tenslotte: ik kan x/y niet begrijpen en dat heeft niets te maken met mijn achtergrond als PM. Omgekeerd als PM leer je juist formules op alle mogelijke manieren interpreteren, je moet wel.⁵⁶ En in de informatica wordt nog meer flexibiliteit vereist. En door de jaren heen blij ik dat ook te hebben. Maar omdat jij kennelijk onder geen enkele voorwaarde voorbeelden wilt leveren van wat x/y betekent kan ik er ook nooit achter komen wat je ermee bedoelt.⁵⁷ Het zij zo, maar mij ontgaat volstrekt waarom je niet een poging zou willen doen om gewoon uit te leggen wat je er mee wilt

⁵⁴ SEP is $0 \neq 1$. The formal restriction is that equations cannot result into inequalities. $a = b$ cannot result into some $c \neq d$. The papers by JB are targetted at formats in terms of equations, since these would allow faster calculation (rather than testing on zero). It might be worthwhile to see whether computers could faster deal with non-equalities?

⁵⁵ This now is in the paper section 2g.

⁵⁶ But one should not substitute into a syntactic test. Also econometricians and teachers learn to test formulas in various ways, this is not restricted to RM.

⁵⁷ This is wrong. Such examples have been supplied, in COTP, in the email exchange of 2012 and in the article, like Alders. Besides, the derivatives are the same as commonly (except $Abs[x]$).

uitdrukken.⁵⁸ Mijn verbazing hierover is wel groot! Hier heb ik ook wel kritiek op. Ik vind het heel merkwaardig en ik krijg het gevoel dat je me op geen enkele wijze aux serieux neemt. Ik doe dat met jou wel. Ik ga op jouw opmerkingen wel in. Nogmaals het ONTGAAT mij waarom jij vragen van mijn kant als onwil meent te kunnen bestempelen. Dat is tenminste wat ik uit het PM verhaal haal. Iemand die je iets laat lezen heeft toch zelf iets te zeggen over wat hij of zij begrijpt zou ik zo zeggen. Hoe je op de gedachte komt dat mijn onbegrip van x/y een zaak is van mijn "PM status" is mij een raadsel. mvg, Jan

At 2014-09-11 10:32, TCwrote:

Hi Jan,

[Attachment: page 21 of draft today]

Leuk te horen dat ik iets aan je begrip van het meadow kon bijdragen - en dat mijn vraag beantwoord is. Je hebt meteen een eleganter bewijs, wellicht dan in een regel: als RIL dan met $(x > 0 \text{ of } x < 0)$ is $(x/x < 1 \text{ of } x/x > 1)$ of $(x.x/x > x \text{ of } x.x/x < x)$ in strijd met RIL. Ik zal dit met verwijzing naar jou opnemen.

Hieronder in (1) je email van 2012-07-07, waarin je zelf een definitie van $y // x$ geeft die je zegt dat die zou kunnen, maar je zit nog met de domein uitbreiding. NB. Je schrijft steeds $x // y$ maar ik schrijf steeds $y // x$ omdat in het platte vlak vaak horizontaal x en vertikaal $y = f[x]$ wordt gekozen. Zou je mijn schrijfwijze kunnen overnemen ?

Bijgaand de vandaag iets begewerkte sectie 4 van het paper. Ik leg denkkelijk beter uit dat ik liever over variabelen spreek omdat de SM gewoonte bestaat om daarvoor domeinen vast te leggen (en niet voor expressies). Maar ik verander "a variable" in "(a) variable" zodat jouw leeswijze van "a +a is variabel maar geen variabele" ook kan. Zie hieronder in (2) mijn email uit 2012 dat ik daarmee al akkoord was. Ik natuurlijk niet de PDF van COTP veranderen want dat is een boek met ISBN. Het was jouw keuze om steeds naar COTP terug te keren en te negeren dat ik die verandering in de Reading Notes wilde opnemen. Dat laatste kan ik nu doen nu ik het meadow begrijp, maar dat laat aan de intentie niets af.

Je vraagt voorbeelden. Maar kijk in COTP voor polynomen, gonio en exp. De afgeleiden zijn gelijk met Weierstrasz of dynamisch quotient. Dus hoezo zou er een gebrek aan voorbeelden zijn ?

Ja, ik kan beter expliciteren wat $Sky =_{def}$ is.

Ik ben verbaasd dat je stelt dat ik je niet au serieux zou nemen. Ik doe dat in hoge mate. Ik heb steeds adequaat gereageerd en je al een paar maal dank gezegd. Voor dat hoofdstuk 7 van La Bastide ook uitdrukkelijk mijn erkentelijkheid betuigd, want ik was gericht op Van Hiele en zou zo'n proefschrift over Freudenthal niet snel hebben ingekeken. Ik ben vrij ver met het verzamelen van onze emails, die inmiddels tot twee papers hebben geleid. Bij teruglezen zou het je kunnen verbazen hoe adequaat ik steeds reageer. Ja [jij / TC] vaak ook, natuurlijk, maar m.i. met onvoldoende begrip voor SM.

Met groet,

Thomas

(1)

At 2012-07-07 12:37, JB wrote:

⁵⁸ This explanation has been provided in the definition of the quotient. But, okay, the article now contains a fully verbal explanation. The real problem is that JB does not explain, while using SM concepts, to identify where the definition is wrong. If I explain that it is forbidden to substitute into a syntactical test, so let him explain what else would be wrong, but he does not do so.

Wat is overigens $x/(x.x)$? levert dat $1/x$, zo ja, dan blijkt daarmee dat in de range van $-//$ -expressies met $/$ erin voorkomen. Zo ja, wat betekent dan "declare the result valid for the domain (VAN WAT) extension $x.x=0$ " in dit geval. Deze zin met "declare.." kan aan de definite van $-//$ - niets toe of af doen. Het is een soort van zijeffect, maar het draagt niet bij aan de vorming van een expressie. Dat brengt mij op de volgende vorm van de definitie van $-//$ -: $y//x = \{y/x \text{ als } x \text{ een constante waarde heeft, zo niet vereenvoudig dan } z \text{ verkregen met (simplify of schoolwiskunde) vanuit als resultaat van vereenvoudiging van } x/y\}$ Hier zijn x, y, z metavariablen die staan voor expressies. Dat kan natuurlijk. mvg Jan ⁵⁹

(2)

Date: Sat, 07 Jul 2012 10:48:29 +0200
To: "JB" JB
From: TC
Subject: Zaterdagochtend 7/7 - RE: Even snel - RE: over je 2e pdf

Dag Jan,

Je geeft mijn woorden verkeerd weer.

In SM is x een variabele, ook als deze de waarde $x = 2z$ krijgt.

Dit ter onderscheid van $x = 3$, waarbij het de gewoonte is te zeggen dat x dan een constante waarde heeft of zelfs een constante is. Bijvoorbeeld in $a x^2 + b x + c = 0$ dan kunnen a, b en c constanten zijn.

In SM kan de breuk gedefinieerd worden met teller y en noemer x , zodat y / x . Wanneer dan voor de noemer $x = z + z$ wordt gesubstitueerd dan blijft $x = 2z$ een variabele.

Ja, een uitdrukking als " $2z$ " op zichzelf beschouwd is geen variabele. Dat heb ik nooit beweerd. Ik heb dat alleen aangegeven in de context van substitutie in teller of noemer.

De definitie van $y // x$ is dus goed.

Ik heb er geen moeite mee om in de Reading Notes een opmerking toe te voegen dat PM in plaats van "a variable" graag alleen "variable" lezen.

Het is niet nodig te suggereren dat ik denk dat alleen ik weet wat SM is. Dat is toch een rare opmerking? Dat doet afbreuk aan het respect dat je me toch zou willen tonen.

Bekijk eens dit probleem. Laat x een variabele zijn en laat een uitdrukking zijn $a^2 + a$. Laat gelden dat $x = a^2 + a$. Hierbij heeft "=" de betekenis van "is identiek aan". Het domein voor a is R . Blijkbaar is het mogelijk om x op te vatten als een functie van a , dus $x = x[a] = a^2 + a$. Klaarblijkelijk kan een functie ook een variabele zijn? Nogmaals, er was identiek zijn, dus zulke conclusies lijken onvermijdelijk. Dus zeggen dat alleen een losstaande x een variabele is stuit op het probleem dat ook $x[a]$ een variabele is. Kortom, SM zit vol met dit soort "paradoxen", die alleen ontstaan doordat niet alles zo streng wordt opgebouwd als in PM. Ik ben zelf voorstander van wat meer strengheid in SM. Maar voorlopig lost SM zulke paradoxen op door er niet naar te kijken en geen vragen wakker te roepen. Dat gezegd zijnde, volgt $y // x$ de definitie van y / x door teller en noemer als aparte variabelen op te vatten.

⁵⁹ At 2012-07-09 13:01 I asked how JB defines division but did not get an answer. I should have asked too how he tests whether an expression has a constant value, say $x - x$ or $4 + 0 * x$. If he doesn't know what simplification is, is he going to test the full domain of x ? My own suggestion for a syntactic test on being a constant now is in the paper.

At 2014-09-11 23:55, TC wrote:

Dag Jan,

Dit lijkt een stabielere versie te worden.

De titel is nu: "Education, division & derivative: Putting a Sky above a Field or a Meadow"

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Gezien je getoonde gevoeligheid voor SM vs PM moet je maar aangeven welke passages nuanceren zouden behoeven.

De verwijzing hiernaar is ook opgenomen in de Reading Notes, met ook "(a) variable":

<http://thomascool.eu/Papers/COTP/2011-08-23-ReadingNotesForCOTP.pdf>

Mijn vorige email van half-elf vanochtend bevatte een paar typefouten, waaronder "Ja" dat "Jij" moest zijn: ⁶⁰

At 2014-09-11 10:32, TCwrote:

(...) Bij teruglezen zou het je kunnen verbazen hoe adequaat ik steeds reageer. Ja [moet "Jij" zijn] vaak ook, natuurlijk, maar m.i. met onvoldoende begrip voor SM.

T.a.v. die formulering van Sky ben ik natuurlijk niet tevreden. Ik ben niet thuis in groepentheorie. Ik zie dat SEP, CR en GIL, Field en Meadow onafhankelijk van de successor functie gedefinieerd worden, zodat Q alleen een implementatie is, en er ook andere zijn (ook eindig). Bij teksten over $(R, +, \times, <)$ wordt er direct op R ingezoomd. Ik doe dat voor de Sky ook maar, aannemend dat Q toch in R zit, en eindige gevallen niet relevant zijn. Ik neem aan dat $y // x$ ook voor Q interessant zou kunnen zijn, maar een afgeleide in Q lijkt me nog lastig voor te stellen. ⁶¹

Ik weet niet zo goed hoe ik tegen het artikel moet aankijken. In 2012 gaf je nogal af op "a variable", op voor mij onbegrijpelijke wijze, omdat ik aangaf akkoord te gaan met een lezing als "variable" (hoewel ik daarnaast natuurlijk wel uitlegde waarom voor mij "a variable" gekozen was). In 2012 had ik geen beeld van het Meadow, en was mijn Sky tentatief. Ik heb nu vooral aandacht besteed aan de dialoog SM - PM en het juist weergeven van het Meadow, zodat dit af is. Wanneer jij variable en meadow kunt afvinken, resteert het deel over sky. ⁶² Wanneer die eerdere stukken nu vlot weggelezen kan een lezer ze als triviaal gaan zien en weer veel slakken zout op sky leggen, terwijl het voor mij nog steeds maar iets heel tentatiefs uit 2012 is. Waarom zo ingewikkeld doen wanneer het voor leerlingen toch begrijpelijk moet zijn wanneer ze al opdrachten krijgen om $(x^2 - 1) / (x - 1)$ te vereenvoudigen (met de diverse complicaties)? Maar goed, wanneer variable en meadow afgevinkt kunnen worden, dan maar kijken hoe verder, met sky als een van de eerste mogelijkheden.

Met groet,

Thomas

⁶⁰ I tried to understand what happened. Actually it must have been "Ja jij vaak ook" but somehow the "jij" dropped out.

⁶¹ See the email exchange in 2012 with $(2 - x^2) / (2 - x^2)$ for Q where the denominator is never zero since there is no rational number such that its square is 2.

⁶² In the subsequent emails, JB does not say that he has no problem with my report on the meadow. In a way this is a bit surprising, since on the common meadow I conclude that axiom 12 is curious, and that SIP3 causes the common meadow to collapse to the involutive meadow with $\hat{a} = 0$. I had expected a comment on this, but perhaps should have asked directly that I expected a confirmation on that.

At 2014-09-12 10:57, JB wrote:

Dag Thomas, ik kan natuurlijk wel $y//x$ schrijven maar het kan niet uitmaken bij de definitie van een functie. In die definitie zijn dit onvermijdelijk gebonden variabelen (en als Y-as en X-as worden bedoeld dan is dat alleen nog maar uitdrukkelijker het geval). Wat betreft definitie van $y//x$. Ik kan niets met reading notes hier en COTP daar, en de vraag of ik version management daarvan goed in mijn hoofd heb, wat ik nodig heb is iets dat ook maar lijkt op het begin van een definitie die ik kan lezen. En dat begint onvermijdelijk met de vraag wat men voor y en x in mag vullen. Zonder duidelijkheid daarover is niet sprake van iets dat ook maar op afstand lijkt op een definitie.⁶³ En dit spreekt helemaal niet vanzelf. Dat is het punt waarop ik werkelijk meen dat jij mij onvoldoende aux sérieux neemt. Vragen daarover hebben niets maar dan ook niets met PM of zo te maken. maar alleen met de vraag wat $y//x$ betekent. Laat ik dan enkele voorbeelden noemen (nu voor $y//x$),

met $y:=t$, $x:=r$ wordt uitgedrukt dat we gelijktijdig voor y t invullen en voor x r invullen. (De gelijktijdigheid is van belang opdat ook $y:=x$, $x:y$ oplevert wat je zou willen.)

$y := 1$, $x := 1$: $y//x = 1$,

$y := 1$, $x := 0$: in dit geval weet ik niet wat jouw omschrijving oplevert,

$y := x^2$, $x := x$: $y//x = x$ (ik neem aan dat dit de kern van de kwestie is, hier gaat het allemaal om),

$y := (x-1).(x+6)$, $x := x-1$: $y//x = x+6$ (hier is het essentieel dat x we in de omschrijving zouden lezen "unless x is not constant", dat is duidelijker dan unless x is not (a) variable").

$y := x-1$, $x := (x-1).(x+6)$: $y//x = 1/(x+6)$ (nu is de geldigheid in jouw formulering ook uitgebreid naar $x = -6$, maar dat lijkt mij niet de bedoeling. De geldigheid is wel uitgebreid naar $x = 1$, maar niet naar $x = -6$).

$y := z-1$, $x := (x-1).(x+6)$: $y//x = y/x = (z-1)/(x-1)(x+6)$. Alleen door voorbeeld na voorbeeld goed te bekijken en te doordenken ontstaat een intuïtie die vervolgens in een definitie kan worden omgezet, mvg, Jan ____

At 2014-09-12 11:53, LB wrote:

Dag Thomas,

A) Wat betreft de Sky: Die hangt op Simplify als parameter. Is de Simplify transformatie een gegeven zonder dat er requirements op zijn. Ik zou denken dat tenminste het volgende geldt: voor een expressie X

1) $\text{Simplify}(X) = X$ op een verzameling van maat 0 na. (En misschien is dat ook voldoende).⁶⁴

2) Onder deze eis heeft $\text{Simplify}(X)$ een relatief groot domein (je vindt geen expressie Y in de plaats van $\text{Simplify}(X)$ met groter domein die aan dezelfde eis voldoet.)

3) Onduidelijk is mij of $\text{Simplify}(X)$ ook als expressie kleiner moet zijn dan X . (B.v. wat is $\text{Simplify}(X)$ met $X = x-x$. Zou zowel 0 als $x-x$ kunnen zijn).⁶⁵

B) In deze tekst begrijp ik de rol van A en A' (4.1.1. p11) niet. De 0 zit in de range niet in het domein zou ik denken. Volgens mij is dit deel van definitie 8' niet op orde.

⁶³ This clarity has been given in COTP for SM. Now the article sections 2d, 3b and 4 explain SM to RM. Section 7 of the Sky is intended to lift the definition from SM to forms that RM might work with.

⁶⁴ $\text{Simplify}[x + x] = x + x$ does not solve anything. What do I misunderstand.

⁶⁵ This is a repetition of the discussion in 2012: JB does not accept simplification in SM, in which $x - x$ obviously collapses to 0, except for pupils who still have to learn this (e.g. subtraction).

C) SM ontstaat door dat PM kritisch naar het materiaal kijkt dat ie eerst zelf goed heeft begrepen. In die zin is er werkelijk geen contradictie tussen SM en PM.⁶⁶

D) Ik ben niet gevoelig voor het onderscheid tussen SM en PM, dat is er gewoon, dat hanteer ik net zo goed als dat moet. Maar ik ben wel erg gevoelig voor jouw voortdurende poging om vragen over $y//x$ te labelen als een onnodige hobby van een PM. Dat is een oneigenlijk gebruik van dit onderscheid in mijn ogen. Hiervan een actueel voorbeeld: SM = verpleger, PM = arts. Op de vraag of een Ebola patient in voldoende mate van isolatie wordt behandeld kan het antwoord niet luiden: "u snapt niet wat het verschil tussen een verpleger en een arts is, doe niet zo moeilijk, een verpleger ziet meteen dat dit wel goed zit". Jij stelt je a.h.w. op als iemand die bij ieder medische vraag nogmaals uitlegt dat de vragensteller kennelijk het verschil tussen de verpleger en de arts niet begrijpt en dus niet begrijpt hoe een verpleger de wereld bekijkt etc. mvg, Jan mvg, Jan _____

At 2014-09-13 20:52, TC wrote:

Dag Jan,

At 2014-09-12 10:57, you wrote:

Dag Thomas, ik kan natuurlijk wel $y//x$ schrijven maar het kan niet uitmaken bij de definitie van een functie

Niet voor PM maar wel voor SM, wanneer het in allerlei schoolboekjes staan, en leerlingen by $y // x$ met oogbeweging synchroon y -as en x -as kunnen vinden, terwijl ze bij $x // y$ een kruisbeweging moeten maken, en dat kunnen vergeten.⁶⁷

In die definitie zijn dit onvermijdelijk gebonden variabelen (en als Y -as en X -as worden bedoeld dan is dat alleen nog maar uitdrukkelijker het geval).

Zeker is dat sterker. Maar niet in de beleving van leerlingen die juist die link moeten leren leggen.⁶⁸

Wat betreft definitie van $y//x$. Ik kan niets met reading notes hier en COTP daar, en de vraag of ik version management daarvan goed in mijn hoofd heb, wat ik nodig heb is iets dat ook maar lijkt op het begin van een definitie die ik kan lezen.

- (a) Ik schreef het je op 7 juli 2012. Is er reden om aan mijn woord te twijfelen ?
- (b) De verwijzing staat in de reading notes ?
- (c) Het staat nu in het concept-artikel dat binnenkort op arxiv staat.
- (d) Als je wilt stuur ik je een briefje met handtekening.
- (e) In de versie van vandaag, net op het web gezet:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

is er natuurlijk onderscheid tussen de uitleg voor de algebra van expressies en de uitleg voor abstracte sky. Aan dat laatste ben ik nog niet toegekomen.

De uitleg voor algebra in SM lijkt nauwelijks te verbeteren, zie s.v.p. Secties 2d, 3 en 4. Wellicht nu scherper geformuleerd: " x is variabele " is dat een syntactische toets op

⁶⁶ This is wrong and self-serving.

⁶⁷ Included in the paper.

⁶⁸ Another indication that JB's attention is not on education, though he claims to know enough on y/x .

de noemer, en jouw substitueren is ongeoorloofd. Maar goed, ik kan zoals aangegeven meegaan in een semantische versie met substitueren.

En dat begint onvermijdelijk met de vraag wat men voor y en x in mag vullen. Zonder duidelijkheid daarover is niet sprake van iets dat ook maar op afstand lijkt op een definitie. En dit spreekt helemaal niet vanzelf. Dat is het punt waarop ik werkelijk meen dat jij mij onvoldoende aux serieux neemt. Vragen daarover hebben niets maar dan ook niets met PM of zo te maken. maar alleen met de vraag wat $y//x$ betekent.

Je mag van alles uit SM voor y en x invullen, maar niet in de syntactische toets of de noemer een variabele of een constante is. Het domein wordt aangepast, en dat kan alleen voor variabelen. Bij functionele formules zou er sprake zijn van een range.

Het staat er, en ik heb het meermalen uitgelegd.

Laat ik dan enkele voorbeelden noemen (nu voor $y//x$),

met $y:=t$, $x:=r$ wordt uitgedrukt dat we gelijktijdig voor y t invullen en voor x r invullen. (De gelijktijdigheid is van belang opdat ook $y:=x$, $x:y$ oplevert wat je zou willen.)

Akkoord met gelijktijdigheid.

$y := 1, x := 1: y//x = 1$,

Okay

$y := 1, x := 0$: in dit geval weet ik niet wat jouw omschrijving oplevert,

y / x , gangbaar niet-gedefinieerd in SM, keuzes voor jouw meadows

$y := x^2, x := x: y//x = x$ (ik neem aan dat dit de kern van de kwestie is, hier gaat het allemaal om),

OK. Het is in ieder geval een belangrijke casus.

$y := (x-1).(x+6), x := x-1: y//x = x+6$ (hier is het essentieel dat x we in de omschrijving zouden lezen "unless x is not constant", dat is duidelijker dan unless x is not (a) variable").⁶⁹

OK t.a.v. $x+6$ en van mij mag je "(a) variable" lezen als "variable" en interpreteren als "not constant".

Waarom je zegt dat het essentieel is, is me een raadsel. In mijn oorspronkelijke definitie heeft breuk[teller, noemer]⁷⁰ een range, en teller en noemer zijn constant of zijn variabelen met hun domeinen. In de formule staat x voor de noemer. De syntactische toets of de noemer een constante of een variabele is, bepaalt de verdere afhandeling.

⁶⁹ The test "a variable" is better suited for SM and should rather not be dropped. It helps students to focus on denominator x and its domain. JB's suggestion is targetted at his own understanding (desire to substitute) instead of SM. Effectively his claim is that COTP is a useless book since it has an incomprehensible definition of the key issue, and that clarity has only been achieved due to his suggestion to replace "a variable" by "not constant", without offering to explain how he is going to test on constancy. JB's claim however is based upon his insufficient understanding of and attention for school mathematics and its research (SM).

⁷⁰ The paper has $\text{div}[y, x]$. To take a different order is a wrong relapse on my part.

$y := x-1, x := (x-1).(x+6): y//x = 1/(x+6)$ (nu is de geldigheid in jouw formulering ook uitgebreid naar $x = -6$, maar dat lijkt mij niet de bedoeling. De geldigheid is wel uitgebreid naar $x = 1$, maar niet naar $x = -6$.^{71 72}

De aanname dat noemer $\neq 0$ betekent de inperking van het domein R van de noemer tot $R \setminus \{0\}$. per saldo tot $x \neq 1$ en $x \neq -6$.

Uitkomst $1 / (x+6)$ okay.

De uitbreiding van het domein van de noemer naar ook 0 betekent $R \setminus \{0\} \cup \{0\}$. Per saldo worden $x = 1$ en $x = -6$ weer toegevoegd.

Zie het document op de website Sectie 7 p15.

Merk op dat mijn definitie spreekt over het domein van de noemer, want de range is voor $f[y, x] = y // x$.

Voor jou is dat domein van de noemer weer de range van jouw $g[x] = (x-1).(x+6)$.

$y := z-1, x := (x-1).(x+6): y//x = y/x = (z-1)/(x-1)(x+6)$.

Inderdaad, zonder nadere informatie over x of z is dat een conclusie. Ik zou wel zeggen dat wanneer nieuwe informatie daarover binnenkomt en $y // x$ dirigerend is, dan vervalt de eerdere reductie.

Alleen door voorbeeld na voorbeeld goed te bekijken en te doordenken ontstaat een intuïtie die vervolgens in een definitie kan worden omgezet, mvv, Jan

Ik heb natuurlijk die methodologie al gevolgd en ben op tot die manier tot een uitstekende definitie gekomen. Het probleem is niet de definitie maar de onwil van de leerling om zich aan de SM conventies te houden.

Als je wilt: <http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

De uitleg voor algebra in SM lijkt nauwelijks te verbeteren, als je wilt zie Secties 2d, 3 en 4.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-13 21:10, TC wrote:

Dag Jan,

Ik heb nog deze vraag tav (ordering \Rightarrow (GIL \Leftrightarrow RIL)): als jij dat niet wist, als deskundige denkkelijk per eminence op dit terrein, is het dat eigenlijk ook "nieuw" ?

Ik wil nog kijken naar je opmerkingen over de Sky, en dan zou het klaar moeten zijn voor arxiv math.HO. Maar ik zou het prettig / verstandig vinden om een crosslink te leggen naar

⁷¹ While x is designated to be the denominator, it is not smart of JB to substitute other expressions that contain x , that might cause confusion with tests on x . However, it might have been unwise of me to provide the original definition in terms of y and x , since JB's wish might be rather general: to use variables x and y for other purposes than only numerator and denominator. Perhaps N and D might have been more useful from the start. Something to consider for the paper.

⁷² This example is now explained in the paper. Apparently JB does not know basic SM, not distinguishing the domain of x and the range of the quotient (with the question where the quotient itself is defined or not).

AC of RA. Ik stel onderzoekers zoals jij op dat terrein voor om toch vooral naar Computer Algebra te kijken. De crosslink is daarnaast ook zeker relevant wanneer dat bovengenoemd inzicht nieuw is. Ik zal niet zo snel iets anders schrijven over AC of RA. Maar wanneer daarvoor een endorsement nodig is, zou je me daarvoor willen endorsen ? Hopelijk heb je ontdekt dat ik zo snel luister dat iemand kan denken dat ik niet luister.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-14 10:07, TC wrote:

Dag Jan,

Ik weet niet of je op een zaterdagavond om 21.00 uur nog naar mijn versie van 13/9 hebt gekeken.

Ik heb daarnet nog een versie van 14/9 op het web gezet:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Reden is het onderbrengen van secties 6, 7, 8 tot een koepel-sectie met de titel "Some research questions for PM and answers for SM". Hopelijk is zo duidelijk dat SM al praktische antwoorden heeft (van voorgaande eeuwen PM) waar PM wellicht hun tanden in willen zetten.

Ook al gaat dit email over SM en PM, mijn hoop is dat je vooral naar de dynamische deling zou willen kijken, in secties 2d, 3 en 4. Nu in stapjes uitgeschreven functie met range en input van variabelen met domein of constanten.

At 2014-09-12 11:53, JB wrote:

C) SM ontstaat door dat PM kritisch naar het materiaal kijkt dat ie eerst zelf goed heeft begrepen. In die zin is er werkelijk geen contradictie tussen SM en PM.

Dit is niet de enige bron voor SM. Het kan ook zijn dat een leraar als Pierre van Hiele mooie dingen vindt zodat mensen als Freudenthal en Tall er enthousiast mee weglopen, en zodat een PM kan denken daar nog eens goed naar te willen kijken. Maar je kunt ook vinden dat PvH ook hoogleraar had moeten worden enzo.

In ieder geval beschouw ik de algebraïsche aanpak van de afgeleide op grond van het dynamisch quotient als een essentiële herijking van de differentiaal- en integraal-rekening. Misschien 100-200 jaar te laat, want er verandert niets aan de uitkomsten, maar toch. En ik ben geen PM dus SM kan ook op andere wijze ontstaan, en PM kan ook gevoed worden vanuit SM.

Overigens staat dynamische deling en aanpak afgeleide al in ALOE 2007, nu in de versie van 2011 op p241. Mijn leservaring betrof toen HBO, en daarbij was deling door nul ook aan de orde gekomen. Pas na ALOE in 2007-2008 ben ik in het VO actief geworden, met de graad in 2008.

De diepere bron is mijn irritatie uit het college analyse over de aanpak van Weierstrasz: waarom nou zo ingewikkeld ? Ik heb die aanpak altijd als conditioneel beschouwd: maar overnemen zolang er niets beters is.

D) Ik ben niet gevoelig voor het onderscheid tussen SM en PM, dat is er gewoon, dat hanteer ik net zo goed als dat moet. Maar ik ben wel erg gevoelig voor jouw voortdurende poging om vragen over y/x te labelen als een onnodige hobby van een PM. Dat is een oneigenlijk gebruik van dit onderscheid in mijn ogen. Hiervan een actueel voorbeeld: SM = verpleger, PM = arts. Op de vraag of een Ebola patient in

voldoende mate van isolatie wordt behandeld kan het antwoord niet luiden: "u snapt niet wat het verschil tussen een verpleger en een arts is, doe niet zo moeilijk, een verpleger ziet meteen dat dit wel goed zit". Jij stelt je a.h.w. op als iemand die bij ieder medische vraag nogmaals uitlegt dat de vragensteller kennelijk het verschil tussen de verpleger en de arts niet begrijpt en dus niet begrijpt hoe een verpleger de wereld bekijkt etc. mvg, Jan

Ik label vragen over $y // x$ niet als onnodige hobby van een PM. Ze zijn m.i. onnodig voor SM, maar wanneer jij als PM die vragen hebt dan ga ik niet beweren dat jij die vragen niet hebt. Het kan zijn dat daarnaar kijken leidt tot meer inzicht en herformuleringen die voor PM acceptabel zijn, waardoor de acceptatie in de wereld der wiskunde ontstaat.

Je voorbeeld t.a.v. verpleger en arts is onjuist want maakt er meteen een hiërarchische relatie van. De juiste verhouding is van verschillende competenties met een overlap op onderdelen. Wanneer zo'n arts zo'n pak aandoet en naar binnen wil om patienten te onderzoeken, en de verpleger houdt hem tegen om hem erop attent te maken dat het knoepje nog niet dicht zit, dan zou zo'n arts toch eerder blij moeten zijn in plaats van de verpleger opzij duwen en toch naar binnen gaan. Wellicht moet die arts dat zelf weten, maar de verpleger er heeft wel oog voor wanneer de arts weer terugkeert, het pak uitdoet, en de rest van de wereld gaat besmetten. Eventueel een hoogleraar verpleegkunde, misschien heb je daar meer respect voor, die jou vertelt dat de verpleger de arts moet tegenhouden wanneer het knoepje niet dicht is.

In *Elegance with Substance* 2009 leg ik de competenties uit. Het falen van wiskundigen t.a.v. de empirie van onderwijs. Daar wordt in wiskundig Nederland geen aandacht aan gegeven. In 2014 concludeer ik dat er een collectief falen is t.a.v. de wetenschappelijke integriteit t.a.v. het onderzoek naar het onderwijs in wiskunde. De PM matigen zich dingen aan waarover zij niet competent zijn. Jij stelt dat de dynamische deling fout is, omdat jij het niet begrijpt. Maar je verdiept je niet in de SM situatie waar die voor is bedoeld. Bij de syntactische test over de noemer x " x is een variabele" ga je expressies substitueren " $x[a]$ is een variabele" maar dat is bij zo'n test niet de bedoeling. Ik begrijp niet waarom je dat doet. Ik heb er geen moeite mee om er dan "(een) variabele" van te maken, maar met dan ook oprekking van het begrip "domein". Het paper geeft een beschrijving van de situatie. De medische vragen zijn genoteerd, alsmede de antwoorden voor de onderwijspraktijk. Dus ik heb niet zo'n houding die je me toeschrijft.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-14 10:53, JB wrote:

Dag Thomas, mijn commentaren hieronder beginnen met een of twee woorden met hoofdletters. mvg JJan _____ From: TC[] Sent: Saturday, September 13, 2014 8:52 PM To: JB Subject: Versie 13/9 en jouw voorbeelden Dag Jan, At 2014-09-12 10:57, you wrote: >Dag Thomas, ik kan natuurlijk wel $y//x$ schrijven maar het kan niet >uitmaken bij de definitie van een functie Niet voor PM maar wel voor SM, wanneer het in allerlei schoolboekjes staan, en leerlingen by $y // x$ met oogbeweging synchroon y -as en x -as kunnen vinden, terwijl ze bij $x // y$ een kruisbeweging moeten maken, en dat kunnen vergeten. >In die definitie zijn dit onvermijdelijk gebonden variabelen (en als > Y -as en X -as worden bedoeld dan is dat alleen nog maar >uitdrukkelijker het geval). Zeker is dat sterker. Maar niet in de beleving van leerlingen die juist die link moeten leren leggen. >Wat betreft definitie van $y//x$. Ik kan niets met reading notes hier >en COTP daar, en de vraag of ik version management daarvan goed in >mijn hoofd heb, wat ik nodig heb is iets dat ook maar lijkt op het >begin van een definitie die ik kan lezen. (a) Ik schreef het je op 7 juli 2012. Is er reden om aan mijn woord te twijfelen ? (b) De verwijzing staat in de reading notes ? WELKE verwijzing bedoel je? (c) Het staat nu in het concept-artikel dat binnenkort op arxiv staat. IK NEEM aan dat je met "het" de definitie van $y//x$ bedoelt, maar die is niet "af". (d) Als je wilt stuur ik je een briefje met handtekening. (e) In de versie van vandaag, net op het web gezet:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf> is er natuurlijk onderscheid tussen de uitleg voor de algebra van expressies en de uitleg voor abstracte sky. Aan dat laatste ben ik nog niet toegekomen. DAT IS wel degelijk van belang. Bijvoorbeeld om te vraag te kunnen beantwoorden of en hoe de Sky (over een Field) iets anders is dan het lichaam van rational functions over dat field. Naarmate de definitie van y/x preciezer wordt convergeren deze twee naar elkaar zo te zien. De uitleg voor algebra in SM lijkt nauwelijks te verbeteren, zie s.v.p. Secties 2d, 3 en 4. Wellicht nu scherper geformuleerd: "x is variabele" is dat een syntactische toets op de noemer, en jouw substitueren is ongeoorloofd. WELKE substitutie is precies ongeoorloofd? Maar goed, ik kan zoals aangegeven meegaan in een semantische versie met substitueren. >En dat begint onvermijdelijk met de vraag wat men voor y en x in mag >vullen. Zonder duidelijkheid daarover is niet sprake van iets dat >ook maar op afstand lijkt op een definitie. En dit spreekt helemaal >niet vanzelf. Dat is het punt waarop ik werkelijk meen dat jij mij >onvoldoende aux sérieux neemt. Vragen daarover hebben niets maar dan >ook niets met PM of zo te maken. maar alleen met de vraag wat y/x betekent. Je mag van alles uit SM voor y en x invullen, maar niet in de syntactische toets of de noemer een variabele of een constante is. ONBEGRIJPELIJK: als je in de toets of x een constante is niets voor x mag invullen dan komt er toch altijd uit at ie geen constante is. Het domein wordt aangepast, en dat kan alleen voor variabelen. Bij functionele formules zou er sprake zijn van een range. DOMEIN en range uit elkaar te houden vergt hier scherpere definities. Domein van wat, range van wat. Het staat er, en ik heb het meermalen uitgelegd. DAT is wat jij zegt maar wanneer ik het niet begrijp of niet zie dan telt dat ook. >Laat ik dan enkele voorbeelden noemen (nu voor y/x), >met $y:=t$, $x:=r$ wordt uitgedrukt dat we gelijktijdig voor y t invullen en voor x r invullen. (De gelijktijdigheid is van belang >opdat ook $y:=x$, $x:=y$ oplevert wat je zou willen.) Akkoord met gelijktijdigheid. $y:=1$, $x:=1$: $y/x=1$, Okay $y:=1$, $x:=0$: in dit geval weet ik niet wat jouw omschrijving oplevert, y/x , gangbaar niet-gedefinieerd in SM, keuzes voor jouw meadows (DAT SM dat zo doet betwijfel ik, maar dat terzijde; het punt is juist dat men zo werkt dat "het geval niet voorkomt"). $y:=x^2$, $x:=x$: $y/x=x$ (ik neem aan dat dit de kern van de >kwestie is, hier gaat het allemaal om), OK. Het is in ieder geval een belangrijke casus. $y:=(x-1).(x+6)$, $x:=x-1$: $y/x=x+6$ (hier is het essentieel dat x we in de omschrijving zouden lezen "unless x is not constant", dat >is duidelijker dan unless x is not (a) variable"). OK t.a.v. $x+6$ en van mij mag je "(a) variable" lezen als "variable" en interpreteren als "not constant". Waarom je zegt dat het essentieel is, is me een raadsel. In mijn oorspronkelijke definitie heeft breuk[teller, noemer] een range, en teller en noemer zijn constant of zijn variabelen met hun domeinen. In de formule staat x voor de noemer. De syntactische toets of de noemer een constante of een variabele is, bepaalt de verdere afhandeling. PRECIES: en "x-1" is geen variabele. Dat hebben we al vele malen besproken. x-1 is variable, en het is geen constante, het bevat een variabele maar het IS geen variabele. Deze precisie is toch echt van belang. $y:=x-1$, $x:=(x-1).(x+6)$: $y/x=1/(x+6)$ (nu is de geldigheid in >jouw formulering ook uitgebreid naar $x=-6$, maar dat lijkt mij niet >de bedoeling. De geldigheid is wel uitgebreid naar $x=1$, maar niet >naar $x=-6$. De aanname dat noemer $\neq 0$ betekent de inperking van het domein R van de noemer tot $R \setminus \{0\}$. per saldo tot $x \neq 1$ en $x \neq -6$. DIT kan iek niet lezen: domein en range raken zo uit elkaar. De range van noemer mag geen nul bevatten, toch. Je gebruik van de termen domein en range is volstrekt onduidelijk voor mij. Uitkomst $1/(x+6)$ okay. De uitbreiding van het domein van de noemer naar ook 0 betekent $R \setminus \{0\} \cup \{0\}$. Per saldo worden $x=1$ en $x=-6$ weer toegevoegd. Zie het document op de website Sectie 7 p15. ZELFDE PROBLEEM op deze pagina's, wat een domein is m.b.t. x voor y/x is een range voor x zelf. DE termen domain en range helpen op deze wijze niet verder, omgekeerd juist. DE daaronder besproken purist moet zelf bedenken waar hij pure in geacht wordt te zijn. (Hij mag kiezen uit: logica, wiskunde, syntax, semantiek, informatica, didactiek) Maar hij weet allang dat het voor jou een andere term is voor iemand die de zaken niet net zo leest als jijzelf. Elk gebruik van de termen domain en range in jouw tekst moet opnieuw worden bekeken. Merk op dat mijn definitie spreekt over het domein van de noemer, want de range is voor $f[y, x] = y/x$. Voor jou is dat domein van de noemer weer de range van jouw $g[x] = (x-1).(x+6)$. $y:=z-1$, $x:=(x-1).(x+6)$: $y/x = y/x = (z-1)/(x-1)(x+6)$. Inderdaad, zonder nadere informatie over x of z is dat een conclusie. Ik zou wel zeggen dat wanneer nieuwe informatie daarover binnenkomt en y/x dirigerend is, dan vervalt de eerdere reductie. >Alleen door voorbeeld na voorbeeld goed te bekijken en te doordenken >ontstaat een intuïtie die vervolgens in een definitie kan worden >omgezet, mvg, Jan Ik heb natuurlijk die methodologie al gevolgd en ben op tot die manier tot een uitstekende definitie gekomen. Het probleem is niet de definitie maar de onwil van de leerling om zich aan de SM

conventies te houden. JOUW probleem is niet die definitie maar het mijne nog steeds wel. Als je wilt: <http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf> De uitleg voor algebra in SM lijkt nauwelijks te verbeteren, als je wilt zie Secties 2d, 3 en 4. ALLERMINST: in 2d heb jij een allinea die begint met "A quick test.." ook dit is gevoelig voor wat met "a variable" bedoelt. NOG IETS: in definitie van x^y komen accoladen voor die je volgens mij nooit in een definitie zie. M.i. verwarrend en overbodig. Met groet, Thomas MVG Jan

At 2014-09-14 12:16, JB wrote:

Dag Thomas, _____

From: TC[] Sent: Saturday, September 13, 2014 9:10 PM To: JB Subject: Vraag t.a.v. Gil \Leftrightarrow RIL Dag Jan, Ik heb nog deze vraag tav (ordering \Rightarrow (GIL \Leftrightarrow RIL)): als jij dat niet wist, als deskundige denkkelijk per eminence op dit terrein, is het dat eigenlijk ook "nieuw" ?

DIE VRAAG heb ik mij ook gesteld, in wat andere bewoordingen. Maar ik ga er van uit dat sinds jaar en dag bekend is dat elke geordende von Neuman regular ring een lichaam is. Dat is wiskundig gesproken het zelfde feit. Zou dat niet zo zijn, wat ik niet weet en ook niet zomaar na kan gaan, dan is (ordering \Rightarrow (GIL \Leftrightarrow RIL)): wat mij betreft inderdaad nieuw.

Ik wil nog kijken naar je opmerkingen over de Sky, en dan zou het klaar moeten zijn voor arxiv math.HO. Maar ik zou het prettig / verstandig vinden om een crosslink te leggen naar AC of RA. Ik stel onderzoekers zoals jij op dat terrein voor om toch vooral naar Computer Algebra te kijken. De crosslink is daarnaast ook zeker relevant wanneer dat bovengenoemd inzicht nieuw is. Ik zal niet zo snel iets anders schrijven over AC of RA. Maar wanneer daarvoor een endorsement nodig is, zou je me daarvoor willen endorseren ? Hopelijk heb je ontdekt dat ik zo snel luister dat iemand kan denken dat ik niet luister.

DAR ENDORSEN doe ik eigenlijk nooit (tot nu toe twee maal). Er wordt ook nauwelijks om gevraagd. Maar als ik het doe dan moet het zo zijn dat ik begrijp wat je schrijft anders moet ik er niet aan beginnen. Jouw paper is nog lang niet af. De definitie van y/x is niet af (domein en range lopen nog steeds onoverzichtelijk door elkaar, de formulering van definitie moet directer). Wat betreft de Sky: als dit gewoon het lichaam van rational functions is en // de deling die daarbij hoort dan moet dat vastgesteld worden. Zo niet dan moet er een verschil in beeld komen. mvg Jan

At 2014-09-14 13:00, JB wrote:

Dag Thomas, dit moet ik printen om er zicht op te krijgen. Nogmaals, elke labeling van mijzelf als een PM die niet weet wat SM is of zo wijs ik af, het is volstreekte onzin wat mij betreft. - ik heb gewoon een lesbevoegdheid VWO. - ik heb [... door VWO] heen mogen praten (op dit vlak althans), - ik heb wiskunde gegeven aan biologen, psychologen, juristen enz. Jouw teksten lijden wat mij betreft steeds weer aan de volgende vier problemen A, B, C en D:

A) je stelt iets nieuws te beweren ZONDER direct en duidelijk en zonder omwegen aan te geven: a) waar het afwijkt van eerdere zaken dienaangaande, b) hoe het technisch werkt, c) en wat er de verdienste van is (wat je nu kunt wat vroeger niet kon of zoiets). en

B) je kiest bewoordingen en formuleringen die zelfs als ze correct zijn zo ongebruikelijk ogen dat je niet zeker bent van wat je leest. Voorbeelden in de meest recente versie: - FCT op p 5, zoiets als (P, not for all x) is zo'n ongebruikelijke vormgeving.⁷³ - De is x^H overigens ook ongebruikelijk omdat je hier $H = -1$ moet nemen terwijl er geen algemene definitie van een exponent in beeld lijkt te zijn. - Daaronder. "Of course, if division were allowed..". Dit is volkomen onduidelijk. Een lezer staat domweg voor de vraag hoe "allowed" te lezen opdat dit

⁷³ Well, "not For all x : $x x^H = 1$ " reads awkward with all those x's lumped together

argument zinvol kan zijn. En zo'n onduidelijkheid zou in zo'n tekst juist niet moeten voorkomen.

C) Je gebruikt SM versus PM als kapstok voor de meest uiteenlopende beweringen, waarbij de PM tegeover jou in een erg slecht uitgangspositie zit als hij commentaar op je werk wil leveren.

D) Je gaat er steeds vanuit dat je een verhaal hebt om zo te zeggen, en dat het enige punt is om dat over de toonbank te krijgen in een bepaalde context. Die aanname maakt de materie onevenredig complex. Wie het verhaal niet ziet kan met die aanname ook niks. Jij gaat in je teksten niet bewust om met de mogelijkheid dat je verhaal "er niet is" after all. Dat is het risico dat PM professioneel moet leren bestrijden en de hele gedachte dat dat in jouw geval overbodig zou zijn maakt iedere PM onvermijdelijk heel argwanend. mvg, Jan mvg, Jan

From: TC[] Sent: Sunday, September 14, 2014 10:07 AM To: JB Cc: JB Subject: Versie 13/9 en PM en SM Dag Jan, Ik weet niet of je op een zaterdagavond om 21.00 uur nog naar mijn versie van 13/9 hebt gekeken. Ik heb daarnet nog een versie van 14/9 op het web gezet: <http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf> Reden is het onderbrengen van secties 6, 7, 8 tot een koepel-sectie met de titel "Some research questions for PM and answers for SM". Hopelijk is zo duidelijk dat SM al praktische antwoorden heeft (van voorgaande eeuwen PM) waar PM wellicht hun tanden in willen zetten. Ook al gaat dit email over SM en PM, mijn hoop is dat je vooral naar de dynamische deling zou willen kijken, in secties 2d, 3 en 4. Nu in stapjes uitgeschreven functie met range en input van variabelen met domein of constanten. (....)

At 2014-09-14 18:07, TC wrote:

Dag Jan,

Ik zag teveel herhaling in het paper en het meadow[^a] voegt weinig toe, dus e.e.a. naar de appendix verplaatst, en deze versie is strakker:

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Overigens ook: $SIP3 \Rightarrow (^a = 0)$, want $(0^H)^H = 0$, en $0^H = ^a$

At 2014-09-14 12:16, you wrote:

"nieuw" ?

DIE VRAAG heb ik mij ook gesteld, in wat andere bewoordingen. Maar ik ga er van uit dat sinds jaar en dag bekend is dat elke geordende von Neuman regular ring een lichaam is. Dat is wiskundig gesproken het zelfde feit. Zou dat niet zo zijn, wat ik niet weet en ook niet zomaar na kan gaan, dan is (ordering \Rightarrow (GIL \Leftrightarrow RIL)): wat mij betreft inderdaad nieuw.

Voor mij is het leuk om nu te merken dat RIL bij Von Neumann vandaan komt, een van mijn helden uit de economische wetenschap (maar natuurlijk veel meer).

Ja. Wiskundig hetzelfde.

Dus niet nieuw voor anderen.

Maar fijn om te weten waarom ik een punt uit je artikelen niet begreep en je dit hebt toegelicht. En ik ben blij dat ik hier mijn intuïtie ben gevolgd om e.e.a. uit te zoeken.

Mijn voorgestelde constructie van Q levert meteen ordening op, wellicht is dat al zo gedaan, en herinner ik me alleen voorbeelden van anderen, maar voor het onderwijs staat het er nu strak.

Ik wil nog kijken naar je opmerkingen over de Sky, en dan zou het klaar moeten zijn voor arxiv math.HO. Maar ik zou het prettig / verstandig vinden om een crosslink te leggen naar AC of RA. Ik stel onderzoekers zoals jij op dat terrein voor om toch vooral naar Computer Algebra te kijken. De crosslink is daarnaast ook zeker relevant wanneer dat bovengenoemd inzicht nieuw is. Ik zal niet zo snel iets anders schrijven over AC of RA. Maar wanneer daarvoor een endorsement nodig is, zou je me daarvoor willen endorseren? Hopelijk heb je ontdekt dat ik zo snel luister dat iemand kan denken dat ik niet luister.

DAR ENDORSEN doe ik eigenlijk nooit (tot nu toe twee maal). Er wordt ook nauwelijks om gevraagd. Maar als ik het doe dan moet het zo zijn dat ik begrijp wat je schrijft anders moet ik er niet aan beginnen. Jouw paper is nog lang niet af. De definitie van $y//x$ is niet af (domein en range lopen nog steeds onoverzichtelijk door elkaar, de formulering van definitie moet directer). Wat betreft de Sky: als dit gewoon het lichaam van rational functions is en $//$ de deling die daarbij hoort dan moet dat vastgesteld worden. Zo niet dan moet er een verschil in beeld komen. mvg Jan

(a) Mee eens tav endorse: niet doen wanneer je er niet achter staat

(b) In SM is het onderscheid conditioneel t.a.v. de situatie. Bij $g[f[a]]$ heeft f een range t.a.v. a maar een domein t.a.v. g . Ik hanteer die conditionaliteit. Met $g[x, y] = y // x$ heeft x een domein.⁷⁴

(c) Natuurlijk niet alleen rationaal, op school bespreken we ook gonio en exp.⁷⁵

NB. Ik moet nog naar je opm. over Sky kijken. Puur een kwestie van tijd.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-14 21:31, JB wrote:

mijn advies is uitdrukkelijk als volgt:

1) om in de context van $y//x$ over domein en range explicieter te zijn. Zoals het er nu staat is het gewoon niet te begrijpen.⁷⁶

2) Om bij de Sky heel expliciet te zijn over de vraag waarom het hier niet het lichaam van rational functions betreft (over \mathbb{Q} of over \mathbb{R} , dat maakt nog niet zoveel uit op dit punt denk ik).

3) Aan de rationale functies over \mathbb{Q}_0 heb ik overigens met John Tucker ook gewerkt. Want die kun je opnieuw bekijken voor elk soort van meadows.

VERDER: Jou is het nu neem ik aan ook opgevallen dat $y//x$, hoe ook gespecificeerd, naast de partial meadow versie die plm is wat jij meent dat bij SM past, ook een (involutive) meadow versie heeft met $1//0 = 0$, en een common meadow versie met $1//0 = a$, en een 1-based non-involutive meadow versie met $1/0 = 1$. mvg Jan

From: TC[] Sent: Sunday, September 14, 2014 6:07 PM To: JB Subject: RE: Vraag t.a.v. Gil \Leftrightarrow RIL Dag Jan, Ik zag teveel herhaling in het paper en het meadow[^a]

⁷⁴ Better write $\text{div}[y, x]$

⁷⁵ If the theory of the rational functions also allow Taylor expansions, then these would be included too. Yet, there are also symbolic impressions and apparently those are not in those studies on the rational functions yet.

⁷⁶ May have missed the earlier email.

voegt weinig toe, dus e.e.a. naar de appendix verplaatst, en deze versie is strakker:
<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf> Overigens ook:
 $SIP3 \Rightarrow (^a = 0)$, want $(0^H)^H = 0$, en $0^H = ^a$ (...)

At 2014-09-16 22:30, TC wrote:

Dag Jan,

At 2014-09-14 21:31, you wrote:
mijn advies is uitdrukkelijk als volgt: 1) om in de context van y/x over domein en range explicieter te zijn. Zoals het er nu staat is het gewoon niet te begrijpen.

Ik heb nog verder in stappen uitgewerkt hoe de uitleg voor leerlingen HAVO - VWO is.

Inderdaad ook met $g[f[x]]$ dat de range van $f[x]$ ook het domein van $y = f[x]$ voor $g[y]$ is.

Zie de versie van vanavond, secties 2d, 3b en 4.

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Ik had drie handvatten voor verbetering:

(1) Door nog eens te kijken naar de syntactische test op een constante noemer (in plaats van variabele). Er zijn in mijn aanpak maar twee mogelijkheden voor de noemer: een constante of een variabele. Ik moet een variabele hebben, want er moet een supervariabele komen met flexibel domein. De syntactische toets op de constante geeft dan meteen de syntactische toets op de variabele. Dat gebruikte ik al maar ik heb die regel nu ook expliciet opgenomen. "Als de noemer een constante is, dan is hij ook zo gekozen." Dan is hij niet als variabele gekozen, en kan hij geen variabele zijn. Om die constante te vinden mag natuurlijk vereenvoudigd worden.

(2) Door me af te vragen of jij wellicht wel of niet doorhad dat de definitie grotendeels in gewone taal is geschreven, maar met beperkte formules, zodat je wellicht niet doorhad dat op deze wijze de problemen van "meta variabelen" en het syntactisch toetsen voor de leerlingen weggewerkt worden? Er staan een paar formules maar er staat vooral tekst over formules. In ieder geval is in de definitie "unless x is a variable" een syntactische toets op de noemer, en een aanwijzing om naar de noemer te kijken. Het is geen substitueerbare uitdrukking op formule-niveau, waarin je $a + a$ mag schrijven om "unless $a + a$ is a variable" te krijgen. Wanneer de noemer x een variabele is kan hij gelijk zijn aan een functionele expressie, maar dat kunnen variabelen.

(3) Ik heb onze correspondentie uit 2012 verzameld en doorgenomen en nog wat punten in het paper meegenomen. Ik zal je een exemplaar van die verzameling sturen, maar wanneer je zou herlezen kan dat veel beter vanuit begrip. Wellicht zie je geen aanleiding tot herlezen maar wanneer je stelt dat ik niet luister, en mijn eigen versie van SM heb, dan zou herlezing vanuit begrip van het paper zeer verhelderend mogen zijn, dus liever daarvoor voorrang.

Ik denk dat de uitleg eigenlijk niet beter kan, althans hoe het bedoeld is voor HAVO-VWO niveau. Ik heb vanuit deze uitleg ook nog besproken wat Alders in sectie 5 doet. Ook hij doet algebraïsche vereenvoudiging, want hij geeft geen limieten buiten het punt $x = 2$, en hij heeft die vereenvoudiging nodig om de limietwaarde te bepalen. Met domeinmanipulatie heb je de dynamische deling.

Ik heb hier prioriteit aan gegeven, want ik wilde die correspondentie van 2012 en dit punt afhebben.

Ik heb dus nog niet gekeken naar je andere opmerkingen. Dat komt nog, zoals t.a.v. hieronder.

PM 1. Overigens Wu (2011) herlezen, die zegt ook iets over fracties, maar minder scherp dan Van Hiele, en in navolging van Wu schrijf ik nu Research Mathematics (RM) ipv. Professional Mathematics (PM).

PM 2. Common meadow vrijwel geheel naar bijlage verplaatst want niet van belang voor de hoofdlijn. Meadow[0] en het deel over de exception switches past mooi bij het vraagstuk van deling en afgeleide.

PM 3. Ook dit is een PM post, hoor, ik bedoel het alleen als oproep tot bescheidenheid, en als aanmoediging dat je niet moet denken dat er allerlei beren verstopt zijn (behalve wellicht punten die je sowieso in SM te verbeteren acht). Je hebt een didactische aantekening, van hoeveel jaar geleden met een cursus van hoeveel maanden? Het volgen van vier kinderen kan van alles betekenen. Lesgeven aan afgestudeerden van allerlei slag is wat anders dan intensief HAVO-VWO en ook heel wat anders dan onderzoek aan didactiek. Misschien heb je meer SM ervaring dan andere RM. Toch verbaast het me dat je het dynamisch quotient niet meteen herkent als een verbetering. Het verbaast me dat je niet accepteert dat mijn gebruik van deling, functies, variabelen, domeinen en ranges gewoon standaard is. Ook het algebraïsch vereenvoudigen zit in de normale afgeleide. Het nieuwe zit in de domeinmanipulatie, en het accepteren dat de formule informatie geeft, die te benutten valt. Zo moeilijk kan dat niet zijn.

Met groet,

Thomas

2) Om bij de Sky heel expliciet te zijn over de vraag waarom het hier niet het lichaam van rational functions betreft (over \mathbb{Q} of over \mathbb{R} , dat maakt nog niet zoveel uit op dit punt denk ik). 3) Aan de rationale functies over \mathbb{Q} heb ik overigens met John Tucker ook gewerkt. Want die kun je opnieuw bekijken voor elk soort van meadows. VERDER: Jou is het nu neem ik aan ook opgevallen dat $y//x$, hoe ook gespecificeerd, naast de partial meadow versie die plm is wat jij meent dat bij SM past, ook een (involutive) meadow versie heeft met $1//0 = 0$, en een common meadow versie met $1//0 = a$, en een 1-based non-involutive meadow versie met $1/0 = 1$. mvg Jan

At 2014-09-17 08:27, JB wrote:

Dag Thomas,

of ik nu een RM of een PM ben ik probeer gewoon begrijpen wat jij schrijft en dat lukt nog steeds niet. Mijn RM karakter blijkt alleen uit het feit dat ik dit volhoud.

Je onderdeel 4.1. uit 7 (def van $/:/$ is nog steeds niet te begrijpen.) Ik zie niet wat het er toe doet dat R nul zou zijn, op welke A dan ook. Het gaat hier toch over \mathbb{Q} die nul wordt op A .

Verder: je hebt het m.i. te vaak over syntax. Zodra je over constante en variabele spreekt komt dat naar voren.⁷⁷

Maar als je b.v. zou schrijven:

- $P//Q = P/Q$ (op domein A) wanneer P een constante waarde heeft op domein A , dan is 100% duidelijk wat er staat en er wordt niet over syntax gesproken.⁷⁸

⁷⁷ JB does not state that he has read the new versions of sections 2d, 3b and 4.

- en b.v. "als het domein van zelf spreekt (b.v. alle mogelijke toekenningen van reële waarden aan in een uitdrukking voor Q optredende variabelen) dan wordt het domein verder niet expliciet genoemd" is ook volkomen duidelijk.⁷⁹

Op dit moment heb ik werkelijk niet scherp (gewoon echt helemaal niet, hoe moet ik het onder worden brengen) wat je met y/x wilt uitdrukken. Iedere toelichting die je geeft riep meer vragen op omdat je da vragen die IK stel niet beantwoordt. Wat zijn de duidelijke gevallen waar het om gaat, wat zijn de jou motiverende voorbeelden, wat heeft het met $x = 0$ te maken, wat maakt het dynamisch, en y/x statisch (of is er en ander contrast).⁸⁰

mvg,
Jan

At 2014-09-17 12:58, TC wrote:

Hi Jan,

Je reageert nu op 7 terwijl ik nog niet naar je opmerkingen daarover had gekeken. De uitnodiging was om naar 2d, 3b en 4 te kijken, en wellicht ook nog Alders, dus SM uitgelegd aan RM.

Met groet,

Thomas

At 2014-09-19 19:36, TC wrote:

Dag Jan,

Ik weet niet of je van deze mooie nazomeravond wilt gaan genieten, ik zometeen denk wel. Maar ik wil je ter afsluiting van deze middag nog wel attent maken op de versie, waarin het artikel m.i. wel af is. Dit is de versie die ik op arxiv wil gaan zetten, op morgen nog nalezen op kleine puntjes.

<http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf>

Ik zag nog een kleine verbetering in de deze punten:

(1) Gebruik van N/D en $N//D$ ter reductie van getoonde misverstanden bij gebruik van $y//x$. Formeel verandert er niets. ALOE, EWS en COTP zijn nog steeds geldig.

(2) Deze subsectie heet nu: 3b.3 Variable, function, domain and range. Daarin leg ik uit dat $f: A \rightarrow B$ een domein A en een range B heeft, en dat voor $g: B \rightarrow C$, geldt dat de range van f weer het domein van g is.

Tevens dat variabelen domeinen hebben: N, Z, Q, R . Maar ook andere domeinen. Dat het in SM bij $f: A \rightarrow B$ vaak zo is dat t.a.v. het domein van f ook gesproken wordt over het domein van de variabele x , die het argument van $f[x]$ vormt.

⁷⁸ But "having a constant value" is a complex notion for students. Are you supposed to test all numbers from $-\infty$ to $+\infty$ to check whether a value is constant? If a is constant in $a x + b$ then students will not imagine some domain for a , so why suggest there is one? The test is essentially a syntactic test (unless you start substituting as JB wants to do). Since the focus is on manipulating the domain, it is better to focus on this in the definition.

⁷⁹ But this domain isn't always obvious. Check x / \sqrt{x} .

⁸⁰ Repetition of moves, see At 2014-09-09 10:24 or At 2014-09-10 23:55

Zodat domein van x en range van $f[x]$ naast elkaar komen te staan. Dat het handig is om hierbij aan te sluiten en voor D dan te kiezen dat die ofwel een constante ofwel een variabele is, zodat het aantal keuzen klein is. Enfin, lees maar.

(3) Ik heb in sectie 4 ook de bezwaren tegen jouw "variabel" ipv "een variabele" opgesomd. Maar ik kan niet uitsluiten dat zo'n vorm denkbaar is. Of een vorm die van teller en noemer alleen functies maakt. Wat het beste werkt, moeten leerlingen in het onderwijs bepalen. Maar de aanpak in ALOE, EWS en COTP lijkt me 99,99% kansrijk.

(4) In sectie 7 een opmerking over rational functies. En in (8') toegevoegd dat $R = 0$ iff $Q = 0$, en "domain" weggelaten wanneer A voldoende is.

Ter afronding, ik heb ook de emails uit 2012 en die van 2014 t.a.v. dit artikel verzameld, en van mijn commentaar voorzien. Zoals gezegd: het is onjuist dat je stelt dat ik niet zou luisteren en geen antwoorden of voorbeelden zou geven. Ik heb steeds adequaat gereageerd, ook al had het gezien deze versie wel scherper gekund. Je kunt het zelf nalezen, het liefst natuurlijk vanuit begrip van de analyse. Ik laat dit voor vanavond echter liggen, en stuur je die verzameling morgen. Wellicht heb je zelf daar ook commentaar bij. Ik beschouw het niet als oude-koeien, want (a) bij herlezing heb ik er baat bij gehad om het artikel aan te scherpen t.a.v. waar onbegrip kon zijn, (b) het is historisch relevant dat deze algebraïsche aanpak van de afgeleiden in 2007 werd gepresenteerd en nog in 2014 op zoveel onbegrip stuit, (c) ik acht het onjuist wanneer gesteld wordt dat ik niet zou luisteren of geen uitleg zou geven, (d) ik protesteer tegen je stelling "ik begrijp het niet dus is het fout": die houding heb je nog niet van tafel gehaald, terwijl als het fout is, je moet kunnen zeggen waar, en dat kan alleen als je het begrijpt. De laatste tijd zeg je zuiverder dat je het niet begrijpt, maar je hebt "het is fout" niet ingetrokken. Terwijl dat desinformatief naar anderen is. Terwijl overduidelijk is dat je maar beperkte kennis van SM hebt, en je nu toch via Van Hiele zou moeten zien dat SM andere eisen dan RM stelt.

Enigszins betrokken zijn Richard Gill via die recensie, die wellicht graag wil horen van de vooruitgang, en Jan van Maanen, van wie ik je vertelde dat ik met hem in gesprek was over een mogelijke promotie. Jan is aan het lezen. Ik kreeg een vraag van hem, want hij was co-promotor van Sacha La Bastide - Van Gemert, van dat proefschrift over HF en hoofdstuk 7 over de niveautheorie van PvH. Ik hoop dat hij ook "sky" wil lezen. Wellicht ook een reactie of SM goed is uitgelegd aan RM. Ik weet niet of je in A'dam nog een lerarenopleider hebt die je een "second opinion" zou kunnen vragen.

NB. Ik heb toch nog een twijfel ontwikkeld t.a.v. je bewijs met Tucker van $0.x = 0$, die "sky" p25 sectie B2. Per saldo komt het neer op $0 = 0 - 0$, en dan $0.x = 0.x - 0.x = 0$. Dit geheel mbv CR. Maar, dan gebruik je ook $0.0^H - 0.0^H = 0$. Het is niet onredelijk te denken dat Indeterminate - Indeterminate = Indeterminate, zodat die uitkomst 0 niet deugt, en een soort petitio principii is t.a.v. $0.0^H = 0$ dat daarna wordt afgeleid. De scheppers van CR zouden in gedachten gehad kunnen hebben dat 0^H niet zou voorkomen. Maar eigenlijk zou dan ook CR4 bescherming behoeven. Om die reden zou ik je eigenlijk ook adviseren om t.a.v. 0^H eerder te spreken als " 0^H ", namelijk de expressie die gevormd zou kunnen worden. Hierbij wekt 0^H de indruk dat het semantisch een echte inverse zou zijn, en dat is het niet, alleen een error. Bij het spreken over " 0^H " is beter duidelijk dat het vormen van die expressie al fout is. In die zin vind ik de artikelen over het meadow dus verwarrend, alsof het echt over "delen door nul" lijkt te gaan. Wanneer er zoiets als hier was uitgelegd dan had ik in 2012 al begrepen dat ik er eigenlijk niet naar behoefde te kijken.

Met groet,

Thomas