Email exchange TC and JB in Dutch in 2012 on COTP and Sky

Writing "Education, division & derivative: Putting a Sky above a Field or a Meadow. Comments on the field, meadow, dynamic quotient and derivative, as seen from research in mathematics education (elementary, highschool & matricola)" (2014)

Thomas Colignatus, editor, thanking Jan Bergstra
http://thomascool.eu

(draft - September 25 2014), update 2016-05-06 w.r.t. underscoring internet links
NB. Overview is at: http://thomascool.eu/Papers/Math/JB/Index.html

Introduction

The email exchange caused me to write:

> "Education, division & derivative: Putting a Sky above a Field or a Meadow. Comments on the field, meadow, dynamic quotient and derivative, as seen from research in mathematics education (elementary, highschool & matricola)" (2014)
>
> http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf

TC = Thomas Colignatus, JB = Jan Bergstra
SM = School Mathematics, PM = Professional Mathematics = RM = Research Mathematics
The following has been made anonymous w.r.t. other persons.
The website link dataweb.nl has been changed to thomascool.eu.
The blockquotes have been made somewhat clearer. Text and reply may be left or right.
Some footnotes in English have been included to alert the reader (often on angles that reappear in the later discussion).

TC explains that x – x = 0 is a constant At 2012-06-29 14:59
TC's agreement on "x variabel" is At 2012-07-01 11:39
JB's formal suggestion is At 2012-07-01 13:53
TC presents the first draft of the paper At 2012-07-02 11:51
JB's critique on the formal sky At 2012-07-06 16:26
JB presents an alternative definition for y // x, that this can be done At 2012-07-07 12:37
JB returns to original definition and neglects explanations and changes At 2012-07-07 14:12
JB proposes to change SM before the dynamic quotient could be accepted: "SM moet het verschil tussen variabelen en metavariablene niet ontkennen dan wordt het nog moeilijker." At 2012-07-07 14:12 "Teller en noemer is iets anders dan variabele. (...) Het gaat om de term variable die in SM onjuist wordt gebruikt." At 2012-07-07 20:34 "Dat schoolboek is duidelijk en leidt bij mij niet tot vragen. Natuurlijk kun je een teller of een noemer met symbolen weergeven, maar daarmee worden het geen variabelen. Ik echt weinig anders van maken. Bij het dynamisch quotient volstaan variabelen wat mij betreft niet." At 2012-07-09 16:30
TC protest against the (deliberate ?) misunderstandings by JB At 2012-07-09 09:50
TC presentation of dynamic quotient and derivate at NVVW At 2013-11-05 19:19

Contents

At 2012-06-27 23:28, TC wrote::

Geachte professor Bergstra,

Als ik het wel heb, hebben we gezamenlijke kennissen in (...)

Ik heb tegen (...) eens verzucht dat wiskundigen weinig belangstelling voor mijn werk tonen. En (...) zegt me nu dat u wel eens zou willen kijken. Mocht e.e.a. op een misverstand berusten, dan mijn excuses.

Op uw publicatielijst zie ik tot mijn aangename verrassing in ieder geval een overlap in belangstelling: dynamische logica.

Hieronder noem ik de twee boeken waar het met name om gaat.

Wanneer u interesse heeft naar deze twee boeken te kijken, dan kan ik zonder meer naar de PDFs verwijzen die op het web staan. Mijn advies is echter de gedrukte versies te nemen, die in de American Book Center op de Book Espresso Machine kunnen worden geproduceerd. Helaas is het mij financieel niet mogelijk u een exemplaar te sturen.

Met hartelijke groet,

Thomas Cool / Thomas Colignatus
Econometrist en leraar wiskunde
Scheveningen, (... telephone ....)

Bijlage

(1) A Logic of Exceptions (ALOE)

http://thomascool.eu/Papers/ALOE/Index.html

Met reviews van Richard Gill (Leiden, KNAW) en EMS (maar ondanks die reviews gebeurt er weinig):
http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2008-09-3-217.pdf
http://www.euro-math-soc.eu/node/2494

(2) Conquest of the Plane (COTP)

http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html

Met reviews van Richard Gill (gepubl. in NAW, maart 2012) en EMS:
http://www.math.leidenuniv.nl/~gill/reviewCOTP.html
[http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2012-13-1-064.pdf]
http://www.euro-math-soc.eu/node/2081

Het pijnlijke is dat er ook een "bespreking" is in Euclides, blad van de leraren wiskunde, waarin de recensent mijn aanpak niet weergeeft maar zaken uit zijn duim gaat zuigen, en dan mijn persoon zwart gaat maken. Klaarblijkelijk staat men geheel machteloos tegenover zoiets, althans, de redactie wil niets doen:

http://thomascool.eu/Papers/COTP/2012-02-13-Colignatus-reactie-op-Euclides-87-4-p168-170.html

At 2012-06-28 00:31, JB wrote:

Geachte heer Cool, het kan even duren maar ik zal proberen om er naar te kijken, mvg, Jan Bergstra

At 2012-06-28 23:58, JB wrote:

Geachte heer Cool, Inmidels heb ik een print van de stukken gemaakt. De vraag waarom er geen of nauwelijks reacties op komen heeft een simpel antwoord: op de meeste werkstukken, ook van academische onderzoekers, komen nauwelijks reacties. Dit werk is daarop geen uitzondering. Een manifest probleem is de lengte en overigens ook de erg zichtbare invloed van een Mathematica package. Ik denk dat de afwisseling van duidelijke opinies en "gewone" techniek beide stukken voor een wiskundige moeilijk leesbaar maakt. Ik heb een eerste technische vraag: wat is de definite van het dynamische quotient (en waar kan ik die vinden)? mvg, Jan Bergstra

At 2012-06-29 09:10, TC wrote:

Geachte professor Bergstra,

De dynamic quotient is op pag 56-58. U kunt de PDF gebruiken op te zoeken.

Het andere commentaar is begrijpelijk en logisch. Maar, ik wilde de didactiek re-engineeren, en dan kom je hierop uit ...

Met beste groet,

Thomas Cool / Thomas Colignatus

PS. (...). Zullen we elkander tutoyeren ?

At 2012-06-29 10:46, JB wrote:

Ik vrees dat ik de definities op p 56-58 niet begrijp. Als -//- een nieuwe operator is dan wil een lezer toch weten hoe ie werkt helemaal onafhankelijk van de motivering van de definitie. In mijn optiek zou iedere agumentie uit de definitie moeten worden gehaald zodat kale informatie over blijft. Uit deze tekst haal ik niet of 1//1=1, of 4//2=2, of 4//0=0, of x//x=1, of x//x=x/x, of x^2//x= x enz. mvg Jan Bergstra

At 2012-06-29 14:59, TC wrote:

Beste Jan, (uit je reactie opmakend dat dit mag)

Uit je reactie krijg ik de indruk dat je alleen op p56 hebt gekeken en niet naar p57 met de formele definitie en het voorbeeld op p58.

Als je wel naar de formele definitie op p57 hebt gekeken, wat is dan het probleem ? Is onduidelijk wat een variabele is ? NB. COTP is geen axiomatische ontwikkeling. COTP veronderstelt heel veel bekend en geeft alleen hier en daar een ander zetje, maar wel zo dat een nieuwe aanpak ontstaat. Bijv. dat de afgeleide met algebra in plaats van met limiet. Maar dat veronderstelt wel dat je weet wat algebra is, d.w.z. gebruik van symbolen die een waarde kunnen hebben, maar alleen op een domein en niet specifiek gekozen.

Ik veronderstel bijvoorbeeld dat je ziet dat x - x geen variabele is maar en constante (nul).

Is deze toelichting toereikend ?

> At 10:46 2012-06-29, you wrote:
> Ik vrees dat ik de definities op p 56-58 niet begrijp. Als -//- een nieuwe operator is dan wil een lezer toch weten hoe ie werkt helemaal onafhankelijk van de motivering van de definitie. In mijn optiek zou iedere agumentie uit de definitie moeten worden gehaald zodat kale informatie over blijft. Uit deze tekst haal ik niet of 1//1=1, 4//2=2, of 4//0=0, of x//x=1, of x//x=x/x, of x^2//x= x enz. mvg Jan Bergstra

Of zou je willen dat ik de formele definitie op pag 57 toepas op deze voorbeelden van je ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-06-30 12:46, TC wrote:

Subject: N.a.v. mijn lezen van enkele pagina's over meadows

Geachte professor Bergstra,

(...) zei me dat u over het "delen door nul" had geschreven, en ik heb google gebruikt. Inmiddels heb ik een beetje gelezen. Bijv. de sheets van "Over Fields en Meadows" (2006) en beginpagina's van INGE BETHKE AND PIET RODENBURG, 2010, "THE INITIAL MEADOWS".

Zo'n algebraische aanpak x · (x · x^-1) = x is inderdaad de moeite van het bekijken waard.

Of x^(-1) =any y such that x · x · y = x and y · y · x = y zou een poging tot herdefinitie kunnen zijn.

Echter, wanneer je afleidt dat 0^-1 = 0 krijg je dan het probleem dat 0 * 0^-1 = 1 of = 0 * 0 = 0, dus, zowel 0 als 1 ?

Mijn aanpak lijkt me een andere, waarin variabelen worden gebruikt, en ook het domein tot variabele wordt gedacht, met daarop toegestane bewerkingen. Laat ik nogmaals de hoop uitspreken dat u toch ook de formele definitie op pag 57 heeft gezien.

Mijn aanpak is overigens inderdaad ook ge-inspireerd door de informatica, en in dit geval computeralgebra, waarin met symbolen als objecten wordt gemanipuleerd. Dus hier inderdaad enige afstand tot traditionele wiskundigen die alleen getallen zien.

Ik sluit niet uit dat het mogelijk zou zijn om deze andere benadering op pag 56-58 ook vorm te geven in zo'n axiomatische aanpak voor Field, maar, wellicht is het een interessantere uitdaging te bewijzen dat het juist niet kan, zodat een algebraische aanpak die gebruik maakt van symbolen juist niet kan worden opgebouwd in regels voor operatoren op alleen getallen.

Met beste groet,

Thomas Cool / Thomas Colignatus

At 2012-06-30 14:30, JB wrote:

Ik heb nogmaals geprobeerd om de bladzijden 56-58 te lezen en in meen dat daar geen definitie van -//- staat. De "strikte" definitie x//y = {x/y...} is m.i. zodanig informeel dat hier niet van een definitie kan worden gesproken, zelfs niet in mijn overtuiging van requirements aangaande x//y. Wat zijn mijn problemen met deze definitie:

a) als operator op getallen is x//y volstrekt bepaald door de waarden die het oplevert op constanten x en y. De definite van x//y suggereert dat x/y en x//y oeral overeenkomen.

b) natuurlijk kan men operatoren ook op termen (expressies al dan niet met variabelen) definieren, maar dan is het m.i. niet gerechtvaardigd om aan te nemen dat bekend is wat de betekenis van P/Q is.

c) Aannemende dat de case dat Q een expressie is expliciet wordt behandeld: het onderscheid tussen variable en niet variable is onduidelijk. Ik neem aan dat 1-x//1-x = 1 op grond van de definitie maar 1-x is geen variable. [1] een aanpassing van het logisch jargon waarin 1-x een variable is lijkt mij niet haalbaar. Als alternatief is er steeds de mogelijkheid om x als generator in een lichaamsuitbreiding te zien, iets wat de mathematen doorgaans prefereren. Dan moet die lichaamsutbreiding eerst goed begrepen worden voordat het lichaam van rationale functies erover kan worden bepaald. [2]

d) de notie van vereenvoudiging ("simplify") is verre van evident. Wat daar mogelijk is hang sterk af van de algebra waarin je rekent, dat er van een uniek resultaat sprake is (noodzakelij voor een adequate definite), valt niet in te zien.

e) het geldig verklaren voor een groter domein van de identiteit 1-x//1-x =1 is een erg informeel idee. Betekent dat b.v. dat 1-1//1-1=1? [3] Het is eigenlijk de enige betekenis die ik er aan toe kan kennen.

f) als men kijkt naar P//Q dan is het onderscheid Q=0 of Q niet 0 slechts op het oog duidelijk. Zodra Q een expressie met variabelen is komt bewijsbaarheid in het spel.
|- Q = 0,
|-Q=/=0,
|-/-Q=0,
|-/-Q=/=0 gaan divergeren en leiden tot een ramificatie van invullingen voor de definitie die elk tot wat anders leiden.

g) uitendelijk zie ik de intuitie achter x//y niet en ik heb toch jaren aan varianten van deling gewerkt (b.v. een recent stuk in het British Computer Journal).

Wat betreft delen door nul: in mijn daarover moet ik x/x = 1 laten vallen,[4] anders komt er een contradictie op papier en dat is niet de bedoeling. Daar komt het zwakkere x.x / x = x voor in de plaats en dat werkt in de praktijk prima. mvg Jan Bergstra

At 2012-07-01 11:39, TC wrote:

Dag Jan,

Dank voor je reactie. Hoe goed ken je Richard Gill ? Hij zou het waarderen wanneer we hier uitkwamen, en zou een aanbeveling daartoe kunnen doen. Vooral voor jouw geruststelling dat dit haalbaar is.

De notatie y // x legt vast wat al gebeurt met bijv. het voorbeeld op pag 58 met de exception switch. Dus van y / x zijn we al gewend onderscheid te maken voor x = 0 en x =/= 0. De notatie y // x vangt dat in een uitdrukking. Dus het is onjuist om te stellen dat het niet zou kunnen werken, want het werkt al. De aanpak is vervolgens gericht op vereenvoudiging in de

[1] Confusion. The denominator is a variable. The denominator contains other variables.
[2] In the Van Hiele theory of levels the same words can mean something else depending upon the level of abstraction. Students know what static division is and can learn what dynamic division is. One cannot require that highschool students understand the formalism that Bergstra wants to impose here. If this avenue would lead to acceptance by professional mathematicians, then this might be okay though.
Note however twikipedia for the rational function: http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_function (1) it requires polynomials, and we now must suppose that school math functions like trigonometry and exp[x] are included because of their expansions, (2) it excludes that the denominator is zero, which however is the case that we are interested in. Doesn't JB understand that we want to deal with such cases ?
[3] COTP:80 explicitly explains that *x - x* = 0 is a constant and not a variable. The earlier emails to Bergstra did not refer to that page. However At 2012-06-29 14:59, I wrote: Ik veronderstel bijvoorbeeld dat je ziet dat x - x geen variabele is maar en constante (nul)." Thus why does Bergstra not see that 1 - 1 = 0 ?
[4] JB neglects that the definition of y // x tests on *x* <> 0. Thus his comparison is inaccurate. Also, my interest is in the real numbers, and thus I don't have x / x = 1.

didactiek in HAVO / VWO, dus het hoeft niet met een nieuwe axiomatische ontwikkeling. Mijn contact met jou is er dan vooral op gericht dat je collegae kunt geruststellen dat er niets nieuws is, alleen effectievere notatie.

Definitie [5]
y // x = {y / x, tenzij x variabel is, neem dan aan dat x =/= 0, vereenvoudig de uitdrukking y / x, verklaar het resultaat ook geldig voor x = 0 waarbij het domein uitgebreid wordt}.

Van belang is te begrijpen wat x en y zijn. Dit zijn niet slechts "placeholders" of "slots" waarin je altijd een getal ingevuld moet denken. Dit kunnen ook de symbolen zelf zijn. Op school zegt men wel eens "letter-rekenen" maar liever gebruik ik het ouderwetse woord "algebra". Inderdaad kunnen x en y ook expressies zijn die getallen of symbolen bevatten. In COTP staat "x is a variable" maar "x is variable" of "x is a variable expression" zouden inderdaad beter zijn.

Maar het zou leuk zijn wanneer er een formele ontwikkeling mogelijk zou blijken te zijn. Eventueel is dit het zwakkere x x / x = x maar zover ben ik nog niet. Je zegt dat het prima werkt, maar mij is nog onduidelijk welk terrein je dan bedoelt. Mij ging het om de verdere ontwikkeling van calculus zonder limieten, kan dat ook met een meadow ? Voor calculus lijkt y / x toch wel nodig, en dat zou bij jou ook niet-gedefinieerd zijn ? [6]

Of wellicht is het een nieuw wiskundig resultaat dat calculus niet ontwikkeld kan worden met die zwakkere aanpak ?

Ik loop je opmerkingen hieronder langs, en geef daarin ook een antwoord op je email, waarop ik eerder antwoordde met de wedervraag of je accoord ging met het begrip "variabele".

Met beste groet,

Thomas

Bijlage: Antwoorden:

(A)

At 10:46 2012-06-29, JB wrote:
Ik vrees dat ik de definities op p 56-58 niet begrijp. Als -//- een nieuwe operator is dan wil een lezer toch weten hoe ie werkt helemaal onafhankelijk van de motivering van de definitie. In mijn optiek zou iedere agumentie uit de definitie moeten worden gehaald zodat kale informatie over blijft. Uit deze tekst haal ik niet of 1//1=1, of 4//2=2, of 4//0=0, of x//x=1, of x//x=x/x, of x^2//x= x enz.

> 1 // 1 bevat alleen getalswaarden, vereenvoudigt tot 1 / 1, verder bekend, wordt 1
>
> 4 // 0 bevat alleen getalswaarden, vereenvoudigt tot 4 / 0, verder bekend, wordt "niet gedefinieerd"
>
> x // x bevat variabelen, daarvan wordt aangenomen dat die ongelijk nul zijn, dan kan algebraisch vereenvoudigd worden, dit geeft 1, daarna wordt het domein uitgebreid met nul, uitkomst 1 (dus geen tussenstap x / x, omdat "uitdrukking x / x" wat anders is dan "x / x")
>
> x^2 // x bevat variabelen, daarvan wordt aangenomen dat die ongelijk nul zijn, dan kan algebraisch vereenvoudigd worden, dit geeft x, daarna wordt het domein

[5] See the subsequent paragraph where I refer to COTP “a variable” but already agree here that “x is variable” or “x is a variable expression” would be better. This comment must be seen in the context of this exchange. Later I decide that “(a) variable” is best.
[6] What meadows are, and that they are not useful for an alternative algebraic approach for the derivative, becomes only clear to me in September 2014, see said paper.

uitgebreid met nul, uitkomst x (dus geen tussenstap x^2 / x want dit is niet gedefinieerd voor x = 0)

(B)

(1)
At 14:30 2012-06-30, JB wrote:
Ik heb nogmaals geprobeerd om de bladzijden 56-58 te lezen en in meen dat daar geen definitie van -//- staat. De "strikte" definitie x//y = {x/y...} is m.i. zodanig informeel dat hier niet van een definitie kan worden gesproken, zelfs niet in mijn overtuiging van requirements aangaande x//y.

> (1a) Ja, zoals jij bewerkingen definieert met axiomatische aanpak, is het informeel. Mijn hoop is dat dan kan worden vastgelegd wat de bedoeling is, zodat vastgelegd kan worden wat van een axiomatische aanpak wordt verlangd.
>
> Mijn suggesties was daartoe het begrip:
>
> variabele met variabel domein.
>
> (1b) In Mathematica van WRI geeft simplificatie van x / x gewoon 1. Dit lijkt me een unieke uitkomst. Klaarblijkelijk zijn er regels die daartoe leiden. Waarin verschilt deze computer algebra dan van jouw aanpak ? Ja, ik weet niet hoe WRI het heeft gedefinieerd, en heb geen bewijs dat het altijd uniek is. Kernpunt blijft dan voor mij: wanneer blijkt dat je calculus op deze manier kunt opbouwen, dan wordt het extra belangrijk hoe zo'n simplificatie plaatsvindt, en mag hier helderheid en zo'n bewijs van komen.
>
> Je zegt: "ik x/x = 1 laten vallen, anders komt er een contradictie op papier en dat is niet de bedoeling. Daar komt het zwakkere x.x / x = x voor in de plaats en dat werkt in de praktijk prima. "
>
> Mijn suggestie is dan bijv. dat je geen exception switch toestaat. Geen "if ... then ..." clausule met toets op domein ?
>
> Maar ik las dat in een meadow 0^-1 = 0, en dat geeft het probleem dat 0 / 0 = zowel 1 als 0 ?! Of heb ik verkeerd gelezen ?
>
> Wat is die praktijk die je bedoelde ?

Wat zijn mijn problemen met deze definitie: a) als operator op getallen is x//y volstrekt bepaald door de waarden die het oplevert op constanten x en y. De definite van x//y suggereert dat x/y en x//y oeral overeenkomen.

> Ik heb x // y zo gedefinieerd dat ook constante waarden ingevuld mogen worden, om dit algemeen te houden. Vervolgens wordt in het binnenwerk de splitsing gemaakt tussen getalswaarden en symbolen.
>
> Wellicht is er zo'n suggestie. Maar het gebruik van een verschillend symbool is toch ook dat er een verschil zou kunnen zijn.
>
> Dat blijkt ook, zie het verschil tussen x // x = 1 en x / x = {1 als x =/= 0 en niet gedefinieerd voor x = 0}.

b) natuurlijk kan men operatoren ook op termen (expressies al dan niet met variabelen) definieren, maar dan is het m.i. niet gerechtvaardigd om aan te nemen dat bekend is wat de betekenis van P/Q is.

> P / Q lijkt me gedefinieerd wanneer Q =/= 0

Vervolgens is er het onderscheid tussen "uitkomst P / Q" en "uitdrukking P / Q".

c) Aannemende dat de case dat Q een expressie is expliciet wordt behandeld: het onderscheid tussen variable en niet variable is onduidelijk. Ik neem aan dat 1-x//1-x = 1 op grond van de definitie maar 1-x is geen variable. een aanpassing van het logisch jargon waarin 1-x een variable is lijkt mij niet haalbaar.

Ja, 1 - x kan beter een "variable expression" zijn.

Ter onderscheid van x - x dat weliswaar een uitdrukking is maar wel degelijk een constante.

Als alternatief is er steeds de mogelijkheid om x als generator in een lichaamsuitbreiding te zien, iets wat de mathematen doorgaans prefereren. Dan moet die lichaamsutbreiding eerst goed begrepen worden voordat het lichaam van rationale functies erover kan worden bepaald.

"generator" en "lichaamsuitbreiding" zijn voor mij onbekende termen. Ik kan dat opzoeken maar laat dat even liggen.

d) de notie van vereenvoudiging ("simplify") is verre van evident. Wat daar mogelijk is hang sterk af van de algebra waarin je rekent, dat er van een uniek resultaat sprake is (noodzakelij voor een adequate definite), valt niet in te zien.

Zie boven. Mee eens, behalve "valt niet in te zien". Me dunkt dat hier goede afspraken over mogelijk zijn.

e) het geldig verklaren voor een groter domein van de identiteit 1-x//1-x =1 is een erg informeel idee. Betekent dat b.v. dat 1-1//1-1=1?

Nee, want (1 - 1) // (1 - 1) bevat geen variabele expressie.

Het is eigenlijk de enige betekenis die ik er aan toe kan kennen.

Dit is dan toch weer een terugval op mijn eerdere vraag: wat is voor jou een "variabele" ?

f) als men kijkt naar P//Q dan is het onderscheid Q=0 of Q niet 0 slechts op het oog duidelijk. Zodra Q een expressie met variabelen is komt bewijsbaarheid in het spel.

Ja !

|- Q = 0, |-Q=/=0, |-/-Q=0, |-/-Q=/=0 gaan divergeren en leiden tot een ramificatie van invullingen voor de definitie die elk tot wat anders leiden.

Mogelijk spreekt hier de informaticus die hierbij allerlei gedachten heeft die ik nog niet kan volgen.

Ik heb veel ervaring met computeralgebra in Mathematica, en weet bijv. het verschil in testen op integer x = 0 of reeel getal x = 0, maar mij is onduidelijk of je dit bijv. bedoelt met "bewijsbaarheid" ?

Ik kan me voorstellen dat hier theoretische vragen kunnen bestaan, maar voor de middelbare school lijkt het te werken, zie de verdere ontwikkeling in COTP.

g) uitendelijk zie ik de intuitie achter x//y niet en ik heb toch jaren aan varianten van deling gewerkt (b.v. een recent stuk in het British Computer Journal). Wat betreft delen door nul: in mijn daarover moet ik x/x = 1 laten vallen, anders komt er een contradictie op papier en dat is

niet de bedoeling. Daar komt het zwakkere x.x / x = x voor in de plaats en dat werkt in de praktijk prima.

> (a) Kun je me zo'n contraditie laten zien op grond van x // x = 1, waarbij je geen gebruik maakt van bijv. een constante x = y - y ?
>
> (b) Ik geloof je graag t.a.v. die intuitie en ervaring. Ik op mijn beurt gebruik Mathematica al sinds 1993, en heb daarbij vaak gebruik gemaakt van Simplify. Het staat me niet bij dat ik daarbij iets raars ben tegengekomen. Wel vond ik het een wonderlijke beleving plots na al die jaren in te zien dat je op deze manier ook een ontwikkeling van afgeleide en calculus kunt vormgeven.
>
> (c) In de varianten die je van deling hebt bekeken, is daaronder ook de variant van een "variabele met variabel domein" ?
>
> Zoals je er nu over schrijft lijk je met x / x = 1 ook te bedoelen dat 0 / 0 = 1 maar dat is bij mij niet het geval. Bij mij is x // x = 1 maar 0 / 0 is niet gedefinieerd.

At 2012-07-01 13:53, JB wrote:

De theorie van ringen en lichamen, idealen en priemidealen en met lichaamsuitbreidingen van eindige (algebraisch) of oneindige orde (niet algebraisch ofwel transcendent) is DE manier waarop de algebra met expressies en het rekenen daarmee omgaat. Niemand met enige wiskundige scholing kan ooit accepteren dat je de bedoeling hebt het wiskunde onderwijs te renoveren wanneer je daarvan niet eerst kennis hebt genomen. Ik kan daar zelf ook niet mee uit de voeten. [7]

De notie van een variabele expressie is onvoldoende duidelijk om theorie of praktijk op te baseren. Voor zover ik weet is over de rationale getallen niet eens bekend of dat een algorithmisch beslisbare notie is. [8]

Harde grond onder de voeten heeft men met de notie van een expressie die gesloten kan zijn (geen variabele bevat) of open (indien niet gesloten, en dus wel een of meer variabelen bevat). Dat is een ander onderscheid dan variabele of niet variabele expressie. [9]

Als simplify uit Mathematica op dit vlak zinvol functioneert dan zal opgeschreven moeten worden hoe het werkt of wat het doet. [10] En als dat niet kan (te onoverzichtelijk, te lang of te complex) zal die operator (op expressies) en het pakket Mathematica (als definierende context ervan) in je definitie van -//- moeten worden geimporteerd (anders betekent het m.i. toch niets). [11] Wat ik bepleit is allerminst een axiomatische aanpak maar dat een definitie die naam ook waardig is en dat is nu mijns inziens niet het geval. Daar kan ook Richard Gill, die ik overigens nauwelijks ken, niets aan veranderen.

---

[7] This is presented as an observation but this first should have been asked. The observation is false. I have been aware of such theory. It is not so nice to suggest that someone is deficient in his approach. The theory of fields a.s.o. is rather immaterial to the improvement of highschool mathematics. Education is an empirical issue and not an exercise in abstract mathematics. A subsequent point is that I have not further studied fields and so on: there is no need for me to do so. Indeed, when I look into it a bit deeper in September 2014 then I find that it indeed is not urgent for school mathematics.

[8] This is irrelevant for school mathematics.

[9] It might be that one has a strong foundation in the distinction between open and closed expressions, but that distinction is not quite relevant. As x - x is an open expression since it contains a variable x it is still is not variable since $x - x = 0$. It is unclear why Bergstra does not see that, and starts this other discusison on open vs closed expressions.

[10] If the program works, it has been programmed, and thus "written". It depends upon the authors of Mathematica how much they will tell their users.

[11] I will include it in the paper (2012-2014). However, JB then returns to idea that simplify still needs a definition.

Mijn achtergrond is dat ik wiskunde gestudeerd heb en in de de logica ben gepromoveerd, er zit maar weinig informatica in mijn commentaren denk ik. Ik kan weinig anders doen dan herhalen dat zelfs het idee achter -//- mij uit je tekst en uit de toelichting niet duidelijk wordt. (Het symbool -//- is voor mij nu een naam voor een operator waar jij aan denkt maar waarvan ik geen definitie ter beschikking heb, omdat jouw definitie volgens mij niet aan de spelregels voldoet.)

Maar ik doe een poging om verder te komen als volgt. Wat hieronder staat kwalificeert wat mij betreft wel als definities van -//'-, en van een variant -//''-). Ik schrijf -//'- (en -//''-) omdat het anders moeilijk is verschillende versies van de operator die voorkomen uit verschillende definities te vergelijken, en omdat ik over de relatie met -//- expliciet wil kunnen spreken ook al staat mij van -//- als gezegd slechts gedeeltelijke informatie en geen definitie ter beschikking.

1) P//'Q is een expressie, uitgaande van expressies P en Q, in een taal van rekenen met constanten 0,1, optellen aftrekken, vermenigvuldigen en delen(?), en eventueel ook andere primitieven zoals een if{}then{}lse{} of een ordening. Met waarden wordt gerekend in een lichaam L (b.v. de reals of de rationals, of de complex numbers).

2) Als Q een gesloten expressie is dan zijn er twee gevallen:
a) als Q in L ongelijk 0 dan is P//'Q de expressie P/Q, en
b) als Q = 0 (in L), dan is P//'Q niet gedefinieerd.

3) Als Q een variable bevat dan zijn er twee te onderscheiden gevallen:

a) als Q de waarde 0 aan kan nemen in L (voor een "goed" gekozen waarde van de verschillende variablen die er in voorkomen), dan bepalen we R = SIMPLIFY(P/Q), waarbij SIMPLIFY overeenkomt met het resultaat van de gelijknamige operator uit Mathematica (dat is versieafhankelijk).

R is een expressie waar -//- niet in voor komt. In dat geval is P//'Q de expressie R.

b) als Q nooit de waarde 0 aan kan nemen op L dan is P//'Q de expressie P/Q.

Welk problemen levert dit:
- bekijk (2-x.x)//'(2-x.x). Over de rationale getallen komt er (2-x.x)/(2-x.x) uit en over de reals 1. Dat lijkt me echt niet handig. [12]

Dit kunnen we verbeteren door ook in geval b) hierboven SIMPLIFY(P/Q) als resultaat te leveren. Dan wordt de definitie van P//Q daardoor vereenvoudigd door een nieuw en korter onderdeel 3). Dat levert de operator -//''-

3) Als Q een variabele bevat dan P//''Q = R met R het resultaat van SIMPLIFY(P/Q), (waarbij SIMPLIFY etc.etc.). [13]

Ik zou niet weten of //'' overeenkomt met jouw bedoeling voor //.

mvg,
jan

At 2012-07-01 14:34, TC wrote:

Dag Jan,

[12] Sqrt[2] is irrational so that 2 - x x will only be zero for the reals. However, that is immaterial here. As *x* is a variable, then 2 - x x will also have variable outcomes and (2-x.x)//(2-x.x) = 1. It is unclear why Bergstra calls this "not handy". If *x* is rational then also (2-x.x)/(2-x.x) = 1.
[13] Q = x – x contains a variable but still is zero. This has been explained. It is unclear why JB returns to this, and still includes it in his formalisation.

Voordat ik reageer, eerst een korte opmerking en een korte vraag:

At 13:53 2012-07-01, JB wrote:
De theorie van ringen en lichamen, idealen en priemidealen en met lichaamsuitbreidingen van eindige (algebraisch) of oneindige orde (niet algebraisch ofwel transcendent) is DE manier waarop de algebra met expressies en het rekenen daarmee omgaat. Niemand met enige wiskundige scholing kan ooit accepteren dat je de bedoeling hebt het wiskunde onderwijs te renoveren wanneer je daarvan niet eerst kennis hebt genomen. Ik kan daar zelf ook niet mee uit de voeten.

> Naar mijn indruk doe ik echt niet anders dan standaard voor de reals, schrijf ik het alleen anders op.
>
> Ik heb wel naar ringen en lichamen gekeken maar besloten dat hier niet mijn innovatie ligt. Vervolgens heb ik niet geoefend met ringen en lichamen, zodat ik er weinig parate kennis van heb en steeds moet opzoeken wat definities e.d. zijn. Dus wanneer jij in die richting begint te redeneren dan krijg je van mij deze terugmelding.
>
> Voor mij volstaan de re-ele getallen en de bewerkingen daarop.

Welk problemen levert dit:
- bekijk (2-x.x)//'(2-x.x). Over de rationale getallen komt er (2-x.x)/(2-x.x) uit en over de reals 1. Dat lijkt me echt niet handig.

> Er is geen rationale oplossing voor x.x = 2, dus ook standaard voor rationale x: (2-x.x)/(2-x.x) = 1
>
> Waarom zeg je dat dit niet zo is ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-01 15:12, TC wrote:

Beste Jan,

At 13:53 2012-07-01, you wrote:
De theorie van ringen en lichamen, idealen en priemidealen en met lichaamsuitbreidingen van eindige (algebraisch) of oneindige orde (niet algebraisch ofwel transcendent) is DE manier waarop de algebra met expressies en het rekenen daarmee omgaat. Niemand met enige wiskundige scholing kan ooit accepteren dat je de bedoeling hebt het wiskunde onderwijs te renoveren wanneer je daarvan niet eerst kennis hebt genomen. Ik kan daar zelf ook niet mee uit de voeten.

> Als econometristen in Groningen kregen we de wiskunde samen met wis- en natuurkundigen.
>
> Het is gevaarlijk naar wikipedia te verwijzen maar dit lijkt een beetje op de eerstejaarstof die we kregen.
>
> http://nl.wikipedia.org/wiki/Lichaam_(Ned)_/_Veld_(Be)
>
> In jouw tekst over Field vs meadows, lijkt me dat het Lichaam (NL) = Field.

De notie van een variabele expressie is onvoldoende duidelijk om theorie of praktijk op te baseren. Voor zover ik weet is over de rationale getallen niet eens bekend of dat een algorithmisch beslisbare notie is.

Harde grond onder de voeten heeft men met de notie van een expressie die gesloten kan zijn (geen variabele bevat) of open (indien niet gesloten, en dus wel een of meer variabelen bevat). Dat is een ander onderscheid dan variabele of niet variabele expressie.

> Ik kan me voorstellen dat we voor schoolwiskunde alleen bepaalde uitdrukkingen toelaten, waarvoor wel algorithmisch is vast te leggen of een expressie een enkele waarde heeft of dat er domein en bereik zijn.
>
> Leerlingen moeten (x.x - 1) / (x - 1) weten te vereenvoudigen, en zien dat dit voor x = 1 niet gedefinieerd is.
>
> Maar zeg me: is (x - x) voor jou open of gesloten ?

Als simplify uit Mathematica op dit vlak zinvol functioneert dan zal opgeschreven moeten worden hoe het werkt of wat het doet. En als dat niet kan (te onoverzichtelijk, te lang of te complex) zal die operator (op expressies) en het pakket Mathematica (als definierende context ervan) in je definitie van -//- moeten worden geimporteerd (anders betekent het m.i. toch niets). Wat ik bepleit is allerminst een axiomatische aanpak maar dat een definitie die naam ook waardig is en dat is nu mijns inziens niet het geval. Daar kan ook Richard Gill, die ik overigens nauwelijks ken, niets aan veranderen.

> In principe mee eens. Ik wil het echter niet aan Mathematica ophangen. Voor COTP is het voor mij de aangewezen routine, die dat pakket ter beschikking stelt. Voor schoolwiskunde kunnen we gebruik maken van zulke regels uit de schoolwiskunde, en zou Simplify daaraan moeten gaan voldoen.

Mijn achtergrond is dat ik wiskunde gestudeerd heb en in de de logica ben gepromoveerd, er zit maar weinig informatica in mijn commentaren denk ik. Ik kan weinig anders doen dan herhalen dat zelfs het idee achter -//- mij uit je tekst en uit de toelichting niet duidelijk wordt. (Het symbool -//- is voor mij nu een naam voor een operator waar jij aan denkt maar waarvan ik geen definitie ter beschikking heb, omdat jouw definitie volgens mij niet aan de spelregels voldoet.)

> Ja, mijn indruk is ook dat ik een nieuwe spelregel formuleer.
>
> Ah, denkelijk is dan verstandig een verzoek te doen of je ook pag 48-49 wilt bekijken, het verschil tussen een statische uitkomst en een dynamisch algorithme.
>
> Standaard wiskunde gaat uit van een variabele met gegeven domein, terwijl in -//- gemanipuleerd wordt.

Maar ik doe een poging om verder te komen als volgt. Wat hieronder staat kwalificeert wat mij betreft wel als definities van -//'-, en van een variant -//''-). Ik schrijf -//'- (en -//''-) omdat het anders moeilijk is verschillende versies van de operator die voorkomen uit verschillende definities te vergelijken, en omdat ik over de relatie met -//- expliciet wil kunnen spreken ook al staat mij van -//- als gezegd slechts gedeeltelijke informatie en geen definitie ter beschikking.

> Verstandig. Volgens mij maken we met je poging vooruitgang. Maar voordat ik reageer, dan gaarne verduidelijking op:
>
> (1) is (x - x) nu open of gesloten
>
> (2) waarom is (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1 ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-01 17:35, JB wrote:

Commentaar in de tekst hieronder, mvg Jan ____ From: Thomas Cool / Thomas Colignatus Sent: Sunday, July 01, 2012 2:34 PM To: Bergstra, Jan Subject: Korte vraag - RE: zondag 1 /7 - RE: N.a.v. mijn lezen van enkele pagina's over meadows Dag Jan, Voordat ik reageer, eerst een korte opmerking en een korte vraag: At 13:53 2012-07-01, JB wrote:
>De theorie van ringen en lichamen, idealen en priemidealen en met
>lichaamsuitbreidingen van eindige (algebraisch) of oneindige orde
>(niet algebraisch ofwel transcendent) is DE manier waarop de algebra
>met expressies en het rekenen daarmee omgaat. Niemand met enige
>wiskundige scholing kan ooit accepteren dat je de bedoeling hebt het
>wiskunde onderwijs te renoveren wanneer je daarvan niet eerst kennis
>hebt genomen. Ik kan daar zelf ook niet mee uit de voeten.
Naar mijn indruk doe ik echt niet anders dan standaard voor de reals, schrijf ik het alleen anders op.

NEE: dat kun je niet waarmaken, de verschillen zijn groot.

Ik heb wel naar ringen en lichamen gekeken maar besloten dat hier niet mijn innovatie ligt. Vervolgens heb ik niet geoefend met ringen en lichamen, zodat ik er weinig parate kennis van heb en steeds moet opzoeken wat definities e.d. zijn. Dus wanneer jij in die richting begint te redeneren dan krijg je van mij deze terugmelding.

EEN innovatie vergt duidelijke behandeling van en confrontatie met het bestaande materiaal. [14]

Voor mij volstaan de re-ele getallen en de bewerkingen daarop.

VOOR het onderwijs kunnen we m.i. niet om de rationals heen. [15]

>Welk problemen levert dit:
>- bekijk (2-x.x)//'(2-x.x). Over de rationale getallen komt er >(2-x.x)/(2-x.x) uit en over de reals 1. Dat lijkt me echt niet handig.
Er is geen rationale oplossing voor x.x = 2, dus ook standaard voor rationale x: (2-x.x)/(2-x.x) = 1 Waarom zeg je dat dit niet zo is ?

Ja maar het gaat nu niet over de identiteit (2-x.x)/(2-x.x) = 1 maar over de definitie van -//-. HET eerste punt dat opheldering vergt is dit: wat is -//- voor een ding? Is het een functie? Zo ja met welk domein en codomein? Is ie totaal of partieel? [16]

Met beste groet, Thomas

At 2012-07-01 17:57, JB wrote:

Zie tekst, mvg Jan ____ From: Thomas Cool / Thomas Colignatus Sent: Sunday, July 01, 2012 3:12 PM To: Bergstra, Jan Subject: Langer: zondag 1 /7 - RE: N.a.v. mijn lezen van enkele pagina's over meadows Beste Jan, At 13:53 2012-07-01, you wrote:
>De theorie van ringen en lichamen, idealen en priemidealen en met

[14] JB effectively blocks innovation for school mathematics: suggestions can only be presented by professional mathematicians who have time and interest to do professional mathematics (and thus no time for school mathematics)
[15] Rational numbers are included in the reals. There is no-one who suggested that we neglect rationals.
[16] First the argument is about the outcome and now the argument is turned as if it concerns the function.

>lichaamsuitbreidingen van eindige (algebraisch) of oneindige orde
>(niet algebraisch ofwel transcendent) is DE manier waarop de algebra
>met expressies en het rekenen daarmee omgaat. Niemand met enige
>wiskundige scholing kan ooit accepteren dat je de bedoeling hebt het
>wiskunde onderwijs te renoveren wanneer je daarvan niet eerst kennis
>hebt genomen. Ik kan daar zelf ook niet mee uit de voeten.

Als econometristen in Groningen kregen we de wiskunde samen met wis- en natuurkundigen. TJA, dan spaat men doorgaans de grondslagen over. Het is gevaarlijk naar wikipedia te verwijzen maar dit lijkt een beetje op de eerstejaarstof die we kregen. http://nl.wikipedia.org/wiki/Lichaam_(Ned)_/_Veld_(Be) In jouw tekst over Field vs meadows, lijkt me dat het Lichaam (NL) = Field.

ZEKER lichaam= field=(Duits: Koerper)

>De notie van een variabele expressie is onvoldoende duidelijk om
>theorie of praktijk op te baseren. Voor zover ik weet is over de
>rationale getallen niet eens bekend of dat een algorithmisch
>beslisbare notie is.
>
>Harde grond onder de voeten heeft men met de notie van een expressie
>die gesloten kan zijn (geen variabele bevat) of open (indien niet
>gesloten, en dus wel een of meer variabelen bevat). Dat is een ander
>onderscheid dan variabele of niet variabele expressie.

Ik kan me voorstellen dat we voor schoolwiskunde alleen bepaalde uitdrukkingen toelaten, waarvoor wel algorithmisch is vast te leggen of een expressie een enkele waarde heeft of dat er domein en bereik zijn.

DAT algorithme moet dan wel op papier staan. De termen domein en bereik kan ik bij een expressie niet goed plaatsten.

Leerlingen moeten (x.x - 1) / (x - 1) weten te vereenvoudigen, en zien dat dit voor x = 1 niet gedefinieerd is. Maar zeg me: is (x - x) voor jou open of gesloten ?

OPEN, zonder twijfel.

>Als simplify uit Mathematica op dit vlak zinvol functioneert dan zal
>opgeschreven moeten worden hoe het werkt of wat het doet. En als dat
>niet kan (te onoverzichtelijk, te lang of te complex) zal die
>operator (op expressies) en het pakket Mathematica (als definierende
>context ervan) in je definitie van -//- moeten worden geimporteerd
>(anders betekent het m.i. toch niets). Wat ik bepleit is allerminst
>een axiomatische aanpak maar dat een definitie die naam ook waardig
>is en dat is nu mijns inziens niet het geval. Daar kan ook Richard
>Gill, die ik overigens nauwelijks ken, niets aan veranderen.

In principe mee eens. Ik wil het echter niet aan Mathematica ophangen. Voor COTP is het voor mij de aangewezen routine, die dat pakket ter beschikking stelt. Voor schoolwiskunde kunnen we gebruik maken van zulke regels uit de schoolwiskunde, en zou Simplify daaraan moeten gaan voldoen.

ZONDER een duidelijk verhaal over simplify bestaat jouw definitie zelfs niet in aanzet vrees ik. Dat verhaal te maken is niet eenvoudig. Wiskundigen is het drie eeuwen niet gelukt. [17]

>Mijn achtergrond is dat ik wiskunde gestudeerd heb en in de de
>logica ben gepromoveerd, er zit maar weinig informatica in mijn
>commentaren denk ik. Ik kan weinig anders doen dan herhalen dat
>zelfs het idee achter -//- mij uit je tekst en uit de toelichting
>niet duidelijk wordt. (Het symbool -//- is voor mij nu een naam voor

[17] JB makes innovation in education dependent upon solving an issue that mathematicians have been busy with for threehundred years. While I have pointed to practical solutions in both school mathematics and Mathematica.

>een operator waar jij aan denkt maar waarvan ik geen definitie ter
>beschikking heb, omdat jouw definitie volgens mij niet aan de
>spelregels voldoet.)

Ja, mijn indruk is ook dat ik een nieuwe spelregel formuleer.

MAAR dat vergt dan grote voorzichtigheid met de bewering dat men zo wiskunde kan doen. [18]

Ah, denkelijk is dan verstandig een verzoek te doen of je ook pag 48-49 wilt bekijken, het verschil tussen een statische uitkomst en een dynamisch algorithme.

IN de constructieve wiskunde streeft men er tegenwoordig ook naar dat de algorithmische resultaten oneindig precies zijn, het algorithme levert de decimaal ontwikkeling, en termineert niet. De constructie van wortel 2 als element van een lichaamsuitbreiding van de rationals is volgens de gebruikelijke werkwijze niet constructief, maar levert wel een naam voor wortel twee: X mod (X^2 - 2), de andere wortel is -X mod(X^2 - 2). Pas na introductie van een ordening kan men de positieve van de twee resulterende wortels met het wortelteken toegepast op 2 aanduiden. Dat hele proces van de introductie van nietrationale getallen vraagt vervolgens om een meer constructieve aanpak. Dat is erg in de mode op dit moment en er is een aantal auteurs die elk een eigen strategie volgen. [19]

Standaard wiskunde gaat uit van een variabele met gegeven domein, terwijl in -//- gemanipuleerd wordt.

>Maar ik doe een poging om verder te komen als volgt. Wat hieronder
>staat kwalificeert wat mij betreft wel als definities van -//'-, en
>van een variant -//''-). Ik schrijf -//'- (en -//''-) omdat het
>anders moeilijk is verschillende versies van de operator die
>voorkomen uit verschillende definities te vergelijken, en omdat ik
>over de relatie met -//- expliciet wil kunnen spreken ook al staat
>mij van -//- als gezegd slechts gedeeltelijke informatie en geen
>definitie ter beschikking.

Verstandig. Volgens mij maken we met je poging vooruitgang. Maar voordat ik reageer, dan gaarne verduidelijking op: (1) is (x - x) nu open of gesloten

OPEN

(2) waarom is (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1 ?

HET zijn niet dezelfde expressies, en -//- levert expressies op. [20] op dit moment weet ik niet of P//Q een expressie met een / erin kan opleveren. Ik weet dan ook niet of (2 - x.x) // (2 - x.x) = (2 - x.x) / (2 - x.x) wel kan gelden.

Met beste groet, Thomas

At 2012-07-01 20:04, TC wrote:

Dag Jan,

Vanavond ben ik beschaeftigt, ik kijk er morgen weer naar. Wel kan ik opmerken:

(1) Je reactie komt terug in een brei. Ik kan e.e.a. fatsoeneren maar wanneer je een truuc weet om dit te voorkomen dan hoor ik het graag.

[18] JB suggests that I not have been careful.
[19] It is not clear what this comment contributes to school mathematics or our subject.
[20] Observe that the question says -/- and not -//- what Bergstra replies to. For rational x the denominator cannot be zero.

(2) Ik zal morgen proberen om A4 te maken met de ontwikkeling van een lichaam plus dynamisch quotient.

(3) Voortaan gebruik ik SiMplify voor School Math Simplify om gedoe t.a.v. Mathematica te voorkomen. Denkelijk heeft Open Source http://www.sagemath.org/ een uitgewerkt aantal regels. [21]

(4) Je zegt dat (x - x) OPEN is, wat ik al vreesde, omdat het dan weer iets lastiger is aan te sluiten bij regels die je wel accepteert.

Maar, voor y // x is dan de switch denkbaar tussen SiMplify[x] = 0 en SiMplify[x] =/= 0.

(5) Op de vraag waarom is (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1 ?

Antwoord je: HET zijn niet dezelfde expressies, en -//- levert expressies op.

Echter, hierboven staat gewoon -/-. Waarom zouden teller (2 - x.x) en noemer (2 - x.x) niet gelijk zijn ?

(6) Ja, ik heb duidelijk nauwelijks naar deze grondslagen van Lichaam en Ring gekeken en jij intensief. Maar ik zoek de vereenvoudiging van de schoolwiskunde daar ook niet, maar in dynamische manipulatie van het domein. Ik ga uit van bekende -/- en leg daar een -//- bovenop. Het lijkt me dat je geen bezwaar kan hebben tegen het vereenvoudigen van x^2 / x = x voor x =/= 0. Wanneer je nog een hint hebt waarom je zo aanhikt tegen het manipuleren van het domein, en waarom je terugkeert naar een basis (terwijl daar geen discussie over hoeft te zijn omdat ik die accepteer) dan heel graag.

(7) Je hebt gelijk dat mijn definitie op pag 57 geen scherp onderscheid maakt tussen variabele en expressie met variabele uitkomsten. Voor variabelen kunnen we x en y gebruiken en voor expressies P en Q. Maar dan kunnen we ook x = Q en y = P kiezen, en de definitie op pag 57 toepassen. Dus of daar nu echt winst is geboekt laat zich betwijfelen. [22]

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-02 08:27, JB wrote:

Zie tekst, mvg Jan ____ From: Thomas Cool / Thomas Colignatus Sent: Sunday, July 01, 2012 8:04 PM To: Bergstra, Jan Subject: zondagavond 1 /7 - RE: N.a.v. mijn lezen van enkele pagina's over meadows Dag Jan, Vanavond ben ik beschaeftigt, ik kijk er morgen weer naar. Wel kan ik opmerken: (1) Je reactie komt terug in een brei. Ik kan e.e.a. fatsoeneren maar wanneer je een truuc weet om dit te voorkomen dan hoor ik het graag. (2) Ik zal morgen proberen om A4 te maken met de ontwikkeling van een lichaam plus dynamisch quotient. (3) Voortaan gebruik ik SiMplify voor School Math Simplify om gedoe t.a.v. Mathematica te voorkomen. Denkelijk heeft Open Source http://www.sagemath.org/ een uitgewerkt aantal regels.

> DAT kan ik daar niet zomaar vinden. De regels zouden op papier moeten, wie het ook doet.

(4) Je zegt dat (x - x) OPEN is, wat ik al vreesde, omdat het dan weer iets lastiger is aan te sluiten bij regels die je wel accepteert.

---

[21] I will return to just Simplify because SiMplify is too silly.

[22] This reaction is correct but could have been sharper. The point is that COTP relies on standard theory on functions, and does not restate it. Thus the fact that the definition on p57 does not reproduce that same distinction has that same explanation: that COTP does not want to reproduce what is known.

SUBJECTIEF is hier niets, x-x is een term die een variabele bevat en dus niet gesloten is.

Maar, voor y // x is dan de switch denkbaar tussen SiMplify[x] = 0 en SiMplify[x] =/= 0.
MMAR daarmee ben je er niet.

(5) Op de vraag waarom is (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1 ? Antwoord je: HET zijn niet dezelfde expressies, en -//- levert expressies op. Echter, hierboven staat gewoon -/-. Waarom zouden teller (2 - x.x) en noemer (2 - x.x) niet gelijk zijn ?

ALS expressies zijn 1 en 1+0 verschillend, gelijkheid (in een model, algebra, lichaam of wat men maar wil zeggen) identificeert veel meer dan gelijkheid van expressies. -//- is voorals nog een operatie die bij twee expressies een derde levert. De vraag wel symbolen wel en niet in de derde mogen voorkomen is wel de belangrijkste die hier moet worden beantwoord. Wel of geen / is het punt. [23]

(6) Ja, ik heb duidelijk nauwelijks naar deze grondslagen van Lichaam en Ring gekeken en jij intensief. Maar ik zoek de vereenvoudiging van de schoolwiskunde daar ook niet, maar in dynamische manipulatie van het domein. Ik ga uit van bekende -/- en leg daar een -//- bovenop. Het lijkt me dat je geen bezwaar kan hebben tegen het vereenvoudigen van x^2 / x = x voor x =/= 0. Wanneer je nog een hint hebt waarom je zo aanhikt tegen het manipuleren van het domein, en waarom je terugkeert naar een basis (terwijl daar geen discussie over hoeft te zijn omdat ik die accepteer) dan heel graag.

IK HIK er tegenaan dat jij doet alsof je de wiskunde van het rekenen wilt veranderen (of althans anders presenteren), terwijl je in feite over de veel algemere vraag hoe men een operator moet definieren andere opvattingen hebt (of lijkt te hebben) dan gebruikelijk. Dat laatste mag best maar dan is dat het onderwerp en NIET de arithmetiek/algebra. De wiskunde heeft wel degelijk methodologische grondlsagen: verzameling, relatie, functie enz. Als je daar anders tegenaan kijkt, (dat kan en dat komt ook onder wiskundigen voor) maar dan is er werkelijk geen ontkomen aan een systematische bestudering van de verschillende approaches van de grondslagen van de wiskunde vooraf. [24]

(7) Je hebt gelijk dat mijn definitie op pag 57 geen scherp onderscheid maakt tussen variabele en expressie met variabele uitkomsten. Voor variabelen kunnen we x en y gebruiken en voor expressies P en Q. Maar dan kunnen we ook x = Q en y = P kiezen, en de definitie op pag 57 toepassen. Dus of daar nu echt winst is geboekt laat zich betwijfelen.

DE WINST IS DEZE: deze blijkt direct dat de definitie op p. 57 incompleet is omdat ie het geval (x-x)//(x-x) niet behandelt. [25]

Met beste groet, Thomas

---

[23] That expressions 1 and 1+0 are different is obvious an no answer. Bergstra neglects that numerator (2 - x.x) and denominator (2 - x.x) are both equal both as expression and as value. If *x* is a variable then it would not matter for the dynamic quotient that there is a particular instance in the reals that there is a zero.

[24] This is a nonsequitur. COTP has no other approach to functions as in normal school mathematics. The only thing is that the domain of the denominator is manipulated. Students in highschool know about domain and range of a function. Thus they must be able to manipulate that with exclusion or inclusion with zero. This does not require a re-examination of the foundations of mathematics. Of course I do not mind such re-examination, see "A Logic of Exceptions" (1981, 2007, 2011).

[25] This is invalid. That the denominator = $x - x = 0$ makes it a constant and thus it has been treated and thus the definition is complete. The example has been mentioned above and is also discussed on COTP p80.

At 2012-07-02 11:51, TC wrote:

Beste Jan,

Het A4-tje staat achterin in deze PDF.

[Included is the first draft of "Education, division & derivative: Putting a Sky above a Field or a Meadow" http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf *]*

Daarvoor is opbouw voor een lezer die onze gedachtenwisseling niet gevolgd heeft. Wellicht is het handig om dit snel te herlezen (of we dezelfde discussie hebben gehad).

(1) Simplify blijkt toch beter dan SiMplify, dit laatste is pedant, en er hoeft geen verwarring met Mathematica te zijn. Ja, bij Sage weet ik het ook niet te vinden want ik gebruik dat (nog) niet.

(2) je schreef: DE WINST IS DEZE: deze blijkt direct dat de definitie op p. 57 incompleet is omdat ie het geval (x-x)//(x-x) niet behandelt.

Dit is niet juist. Zie COTP pag 80 bovenaan waar dit wordt besproken.

T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0,
zodat (x - x) // (x - x) =
Simplify[Simplify[x - x] / Simplify[x - x]] =
Simplify[0 / 0] = Indeterminate

(3) Mysterieus is nog je onderscheid: (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1. Je zegt dat (2 - x.x) / (2 - x.x) een expressie is, zodat dit niet op natuurlijke wijze vereenvoudigt tot 1 ? Het lijkt me dat je dit voor rationale x toch wel degelijk mag vragen. Hoe dan ook, ik leg er dan voor de laatste stap maar weer een Simplify overheen (jouw //" maar met mijn amendement van een eerste toets op Simplify[noemer] = 0).

(4) At 08:27 2012-07-02, you wrote:

> IK HIK er tegenaan dat jij doet alsof je de wiskunde van het rekenen wilt veranderen (of althans anders presenteren), terwijl je in feite over de veel algemere vraag hoe men een operator moet definieren andere opvattingen hebt (of lijkt te hebben) dan gebruikelijk. Dat laatste mag best maar dan is dat het onderwerp en NIET de arithmetiek/algebra. De wiskunde heeft wel degelijk methodologische grondlsagen: verzameling, relatie, functie enz. Als je daar anders tegenaan kijkt, (dat kan en dat komt ook onder wiskundigen voor) maar dan is er werkelijk geen ontkomen aan een systematische bestudering van de verschillende approaches van de grondslagen van de wiskunde vooraf.

COTP vooronderstelt grondslagen zoals verzameling, relatie, functie, domein, enzovoorts. Daar kijk ik niet anders tegenaan. Wel t.a.v. de kleine modificatie van aanpassing van domein. Hier is de traditionele aanpak op de getallen gericht, terwijl mijn insteek is dat een formule met symbolen ook zelfstandig al informatie bevat, die ook gebruikt mag worden, zodat je met het numerieke domein verstandig kunt spelen.

Ik verander niets aan getallen, optelling, deling, maar m.i. wel aan de algebra met formules. Dus het lichaam van de re-ele getallen blijft gewoon zoals het is. Het field blijft ongewijzigd. Maar er is een sky boven van het werken met symbolen.

Is het duidelijk ?

PM. Ik moet er denkelijk nog een opmerking aan toevoegen dat onduidelijk is of x x / x = x mogelijk maakt calculus te vereenvoudigen (zonder limieten).

Het is gepast je dank te zeggen maar mogelijk vind je dat het een gezamenlijke tekst moet zijn ? Dat laatste heeft ook voordelen voor collegae, dat je ernaar gekeken hebt.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-04 15:32, TC wrote:

Beste Jan,

Je hebt me natuurlijk verwend door afgelopen weekend direct te reageren.

Maar de kwestie is niet zo ingewikkeld, lijkt me, slechts een nieuw inzicht.

Heb je misschien een korte reactie hoe het verder in je agenda past ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-04 15:40, JB wrote:

Het probleem is dat ik door de week minder tijd heb, ik moet 250 mensen managen en dat gaat maar net. Maar dat komt wel weer binnen een paar dagen. mvg Jan

At 2012-07-04 16:04, JB wrote:

Reactie in de tekst, mvg Jan Met je pdf heb ik moeite, ik denk dat het ondeschid tussen SM [school mathematics] en PM [professional mathematics] een illusie is, PM kan tegen alle informele zaken maar het moet wel duidelijk zijn wat men bedoelt en dat is jouw definitie nog steeds niet. Ook de veel uitgebreidere definitie is m.i. nog niet af.
(i) de regel 4.1.1. Consider... is onduidelijk (wat verandert er als jet het niet beschouwt.
(ii) Waarom zou Simplify iets anders doen op een kleiner domein?
(iii) wat betekent extend to X again? (Dat heeft ook informeel geen duidelijke betekenis).
Dus deze uitgebreide definitie moet af en compleet. Jij verslijt dat voor overdreven formaliteit, maar mijn bewering is dat ik werkelijk niet begrijp wat je beoelt totdat her er zo staat dat ik het gewoon kan lezen. En dat ligt net aan mijn logische achtergrond en al helemaal niet aan de informatica waar ook bijna alles informeel is.

> From: Thomas Cool / Thomas Colignatus Sent: Monday, July 02, 2012 11:51 AM To: Bergstra, Jan Subject: Maandag ochtend 2 / 7: draft "Putting a Sky above a Field" Beste Jan, Het A4-tje staat achterin in deze PDF. Daarvoor is opbouw voor een lezer die onze gedachtenwisseling niet gevolgd heeft. Wellicht is het handig om dit snel te herlezen (of we dezelfde discussie hebben gehad). (1) Simplify blijkt toch beter dan SiMplify, dit laatste is pedant, en er hoeft geen verwarring met Mathematica te zijn. Ja, bij Sage weet ik het ook niet te vinden want ik gebruik dat (nog) niet.
>
> (2) je schreef: DE WINST IS DEZE: deze blijkt direct dat de definitie op p. 57 incompleet is omdat ie het geval (x-x)//(x-x) niet behandelt.
>
> Dit is niet juist. Zie COTP pag 80 bovenaan waar dit wordt besproken.
>
> DAT betekent niet dat het in de definitie wordt behandeld. [26]
>
> T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0, zodat (x - x) // (x - x) = Simplify[Simplify[x - x] / Simplify[x - x]] = Simplify[0 / 0] = Indeterminate

[26] COTP p80 discusses *x* - *x* as an example of the application of the definition, and this example shows that the definition is accurate and that *x* - *x* is not a counterexample. Bergstra's suggestion that all possible counterexamples should be included explicitly in the very formulation of a definition is spurious.

DAT lijkt me erg ad hoc simplfy[2] is niet 0 maar 2 (ofwel 1+1) is wel gesloten. [27]

(3) Mysterieus is nog je onderscheid: (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1. Je zegt dat (2 - x.x) / (2 - x.x) een expressie is, zodat dit niet op natuurlijke wijze vereenvoudigt tot 1 ?

DE wereld van expressies is ook gewoon een verzameling. Daarin verschilt de expressie (2 - x.x) / (2 - x.x) van de expressie 1. het domein van x doet voor dat verschil niet terzake. [28]

Het lijkt me dat je dit voor rationale x toch wel degelijk mag vragen. Hoe dan ook, ik leg er dan voor de laatste stap maar weer een Simplify overheen (jouw //" maar met mijn amendement van een eerste toets op Simplify[noemer] = 0).

(4) At 08:27 2012-07-02, you wrote:
> IK HIK er tegenaan dat jij doet alsof je de wiskunde van het
> rekenen wilt veranderen (of althans anders presenteren), terwijl je
> in feite over de veel algemere vraag hoe men een operator moet
> definieren andere opvattingen hebt (of lijkt te hebben) dan
> gebruikelijk. Dat laatste mag best maar dan is dat het onderwerp en
> NIET de arithmetiek/algebra. De wiskunde heeft wel degelijk
> methodologische grondlsagen: verzameling, relatie, functie enz. Als
> je daar anders tegenaan kijkt, (dat kan en dat komt ook onder
> wiskundigen voor) maar dan is er werkelijk geen ontkomen aan een
> systematische bestudering van de verschillende approaches van de
> grondslagen van de wiskunde vooraf.

COTP vooronderstelt grondslagen zoals verzameling, relatie, functie, domein, enzovoorts. Daar kijk ik niet anders tegenaan. Wel t.a.v. de kleine modificatie van aanpassing van domein. Hier is de traditionele aanpak op de getallen gericht, terwijl mijn insteek is dat een formule met symbolen ook zelfstandig al informatie bevat, die ook gebruikt mag worden, zodat je met het numerieke domein verstandig kunt spelen.

ZULKE informatie zit doorgaans in expressies waar men dan even precies mee om gaat als met de onderliggende waarden. [29]

Ik verander niets aan getallen, optelling, deling, maar m.i. wel aan de algebra met formules. Dus het lichaam van de re-ele getallen blijft gewoon zoals het is. Het field blijft ongewijzigd. Maar er is een sky boven van het werken met symbolen. Is het duidelijk ? PM. Ik moet er denkelijk nog een opmerking aan toevoegen dat onduidelijk is of x x / x = x mogelijk maakt calculus te vereenvoudigen (zonder limieten). Het is gepast je dank te zeggen maar mogelijk vind je dat het een gezamenlijke tekst moet zijn ? Dat laatste heeft ook voordelen voor collegae, dat je ernaar gekeken hebt. Met beste groet, Thomas

At 2012-07-04 19:53, TC wrote:

Beste Jan,

[New version of "Sky"]

---

[27] Why would this be "ad hoc" and not a general approach ? Why mention Simplify[1 + 1] as we are looking at Simplify[*x* - *x*] ?
[28] This is illogical. Either they are expressions and identical and reduce to 1, or they are rational numbers, equal and nonzero, and reduce to 1 too. When I say something about number, JB responds by pointing to expressions, and when I point to expressions then JB points to rationals.
[29] Of course I am careful. Why say that this is needed ? Why does JB not register that the common school mathematics is used – so that he can check what that is ?

Ik denk dat de gedachtenwisseling helemaal onderaan belangrijk is.

Ook belangrijk:

Ik ken het onderscheid tussen variabelen en expressies. Mathematica gebruikt bijv. = voor een waarde geven, == voor vergelijkingen, en === voor formele gelijkheid.

Maar, hier gaat het om schoolwiskunde, en daar mag van een leerling verwacht worden dat deze ziet dat (2 - x.x) / (2 - x.x) = 1, voor rationale x, via de betekenis van = in HAVO en VWO, en dat is helaas ambigue.

Ja, als ik een computerprogramma zou schrijven dan zou ik inderdaad zulke details kunnen opschrijven als deze relevant zijn, maar in mijn beleving ben ik daar niet mee bezig.

Voor Mathematica

Simplify[(2 - x.x) / (2 - x.x) == 1] geeft True

Simplify[(2 - x.x) / (2 - x.x) === 1] geeft False

Wanneer ik voor HAVO en VWO zulke voorstellen zou gaan doen, dan krijg je een hele andere discussie. Nee, ik ben gedwongen voor schoolwiskunde te werken met het ambigue = want anders denken die collegae dat het niet op HAVO en VWO zou kunnen. [30]

> At 16:04 2012-07-04, you wrote:
> Reactie in de tekst, mvg Jan Met je pdf heb ik moeite, ik denk dat het ondeschid tussen SM en PM een illusie is, [31]

Zie Wu die er juist een groot nummer van maakt:

http://math.berkeley.edu/~wu

> PM kan tegen alle informele zaken maar het moet wel duidelijk zijn wat men bedoelt en dat is jouw definitie nog steeds niet.

Nou ja, mij wel. Richard kon er ook mee uit de voeten. Maar ik ben bereid je tegemoet te komen.

> Ook de veel uitgebreidere definitie is m.i. nog niet af. (i) de regel 4.1.1. Consider... is onduidelijk (wat verandert er als jet het niet beschouwt.

(a) Je hebt gelijk dat ik het vooral als veiligheidsklep hanteer. Ik kan me voorstellen waarin je alleen met symbolen "x" werkt, zodat "x" // "x" = 1 puur en alleen omdat het symbolen zonder domein zijn. Voor mij is dat echter alleen een hypothese die je zou kunnen onderzoeken. Wellicht echter dat er toch ergens een contradictie door ontstaat. Voor de veiligheid gebruik ik derhalve het flexibele domain, zodat niemand kan zeggen dat er door nul gedeeld wordt. (PM. ik zet hier aanhalingstekens om x om te benadrukken dat het symbolisch is, maar het is ook mogelijk een variabele als symbool te hanteren.)

(b) De regel 4.1.1. is dus juist bedoeld om het niet-beschouwen uit te sluiten.

> (ii) Waarom zou Simplify iets anders doen op een kleiner domein?

Zie (i-a).

[30] This remark has been entered into the paper.
[31] JB returns to the illusionary character of the distinction but thus neglects Wu.

Ik kan me voorstellen dat in sommige gevallen een Simplify routine wordt geschreven die niet kan omgaan met domeinen waarin door nul gedeeld kan worden. Dus voor alle zekerheid een kleiner domein.

> (iii) wat betekent extend to X again? (Dat heeft ook informeel geen duidelijke betekenis). Dus deze uitgebreide definitie moet af en compleet. Jij verslijt dat voor overdreven formaliteit, maar mijn bewering is dat ik werkelijk niet begrijp wat je beoelt totdat her er zo staat dat ik het gewoon kan lezen. [32]

(a) Ik heb dat nu uitgelegd in de nieuwe versie pag 4

(b) En ook zo opgenomen in de nieuwe beschrijving van "Sky" pag 5

> En dat ligt net aan mijn logische achtergrond en al helemaal niet aan de informatica waar ook bijna alles informeel is.

Dat punt was dus duidelijk. Zie bijvoorbeeld mijn "A Logic of Exceptions", met deze bespreking door Richard Gill in NAW:

http://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2008-09-3-217.pdf

http://thomascool.eu/Papers/ALOE/Index.html

> ____ From: Thomas Cool / Thomas Colignatus Sent: Monday, July 02, 2012 11:51 AM To: Bergstra, Jan Subject: Maandag ochtend 2 / 7:
>
> 2) je schreef: DE WINST IS DEZE: deze blijkt direct dat de definitie op p. 57 incompleet is omdat ie het geval (x-x)//(x-x) niet behandelt.
>
> > Dit is niet juist. Zie COTP pag 80 bovenaan waar dit wordt besproken.
> >
> > > DAT betekent niet dat het in de definitie wordt behandeld. [33]

Het wordt wel in de definitie behandeld.

De definitie neemt aan noemer =/= 0. Wanneer noemer = x - x dan is noemer = 0 en kan dus niet noemer =/= 0 genomen worden.

Voor jou dan Simplify[noemer] = 0. [34]

> T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0, zodat (x - x) // (x - x) = Simplify[Simplify[x - x] / Simplify[x - x]] = Simplify[0 / 0] = Indeterminate
>
> > DAT lijkt me erg ad hoc

Nee, het is een antwoord op jouw benadering waarin je alleen openheid en geslotenheid erkent.

Mijn uitgangspunt is dat getoetst moet worden op het al dan niet nul zijn van de teller. Dan is toetsen op openheid en geslotenheid niet nuttig.

De kwestie kan overbrugd worden door er een Simplify tussen te leggen.

> simplfy[2] is niet 0 maar 2 (ofwel 1+1) is wel gesloten.

---

[32] This is now in the article section 6b.
[33] At 2012-07-01 20:04 TC explained that Simplify[x – x] =0.
[34] While this has been specified now, JB below picks up another expression on closed forms and concentrates on that.

Ja, dat is zo. Helemaal mee eens. Is dit ergens een kritiek op ?

> (3) Mysterieus is nog je onderscheid: (2 - x.x) / (2 - x.x) voor rationale x geen 1. Je zegt dat (2 - x.x) / (2 - x.x) een expressie is, zodat dit niet op natuurlijke wijze vereenvoudigt tot 1 ?
>
>> DE wereld van expressies is ook gewoon een verzameling. Daarin verschilt de expressie (2 - x.x) / (2 - x.x) van de expressie 1. het domein van x doet voor dat verschil niet terzake.

Ik mijn reactie naar het begin verplaatst want het lijkt een fundamenteel misverstand in de communicatie te zijn.

> Wel t.a.v. de kleine modificatie van aanpassing van domein. Hier is de traditionele aanpak op de getallen gericht, terwijl mijn insteek is dat een formule met symbolen ook zelfstandig al informatie bevat, die ook gebruikt mag worden, zodat je met het numerieke domein verstandig kunt spelen.
>
>> ZULKE informatie zit doorgaans in expressies waar men dan even precies mee om gaat als met de onderliggende waarden.

Maar niet in de middelbare school wiskunde !!!!

En niet in de ontwikkeling van calculus !!!!

Daar wordt al die informatie gewoon genegeerd.

At 2012-07-04 23:43, JB wrote:

Ik haal er enkele punten uit.
1) Je schreef, >T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0, dat leidt bij mij tot: Simplify[2] = 2. Die toets is dus inadequaat. Dat is inderdaad kritiek op wat jij schreef (zie je desbetreffende opmerking hieronder). [35]
2) Het communicatie probleem is hier niet dat ik scholieren een te formeel of te uitgewerkt systeem zou willen aanpraten, maar dat ik WERKELIJK niet begrijp wat jij met -//- bedoelt omdat de vragen die ik erover stel geen antwoord krijgen: - wat is het domein van -//-? - wat is de range? - hoe werkt simplify? (JA ik kom op het volgende: simplify(P) is de unieke Q zodat P.x//x == Q. Maar dat spant het paard achter de wagen, als het al klopt.)
3) Ik geloof niet dat Richard Gill de definitie van -//- wel begrijpt. Wat ik wel geloof is dat sommige mensen niet zeggen wat ze denken. Daar hebben wiskundigen in aanzienlijke mate last van. Of dat voor RG ook geldt dat weet ik niet. mvg, Jan

> De kwestie kan overbrugd worden door er een Simplify tussen te leggen. >simplfy[2] is niet 0 maar 2 (ofwel 1+1) is wel gesloten. Ja, dat is zo. Helemaal mee eens. Is dit ergens een kritiek op ?

At 2012-07-05 10:13, TC wrote:

Dag Jan,

> At 23:43 2012-07-04, you wrote:
> Ik haal er enkele punten uit. 1) Je schreef, >T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0, dat leidt bij mij tot: Simplify[2] = 2. Die toets is dus inadequaat. Dat is inderdaad kritiek op wat jij schreef (zie je desbetreffende opmerking hieronder).

Ik begrijp niet waarom Simplify[2] niet 2 kan zijn, en wat hier inadequaat kan zijn.

[35] I do not understand this remark. Simplify[x-x] = expr gives a test. If expr = 0 then dynamic division by expr is undefined just as for static division. So why look at Simplify[2] = 2 ? In what way would this invalidate the definition of the dynamic quotient ???

Het enige dat ik kan verzinnen is een onderscheid tussen "2" en 2, en ik heb bijgaande tekst daarvoor nu aangepast. Zie pag 7 voor het A4-tje.

Voor mij is het triviaal. Ik verwijs naar "vertaling afhankelijk van context". Wanneer een expressie wordt gevraagd kan de expressie worden aangeleverd, wanneer een getalswaarde wordt gevraagd kan dat worden aangeleverd.

> 2) Het communicatie probleem is hier niet dat ik scholieren een te formeel of te uitgewerkt systeem zou willen aanpraten, maar dat ik WERKELIJK niet begrijp wat jij met -//- bedoelt omdat de vragen die ik erover stel geen antwoord krijgen: - wat is het domein van -//-? - wat is de range? - hoe werkt simplify?

In dat A4-tje heb ik nu symbol S gebruikt, zodat domein S x S is en range S.

S bevat expressies en getalswaarden.

Hoe werkt Simplify: wel, zodanig dat leerlingen HAVO en VWO hun eindexamen daarmee kunnen halen.

Dus Simplify[Goldbach's conjecture] zal onbepaald blijven, maar wordt niet gevraagd.

Zie de context van "Conquest of the Plane".

> (JA ik kom op het volgende: simplify(P) is de unieke Q zodat P.x//x == Q. Maar dat spant het paard achter de wagen, als het al klopt.)

Ik vrees dat hier de drukbezette manager even geen tijd heeft gehad om zorgvuldig naar de materie te kijken.

> 3) Ik geloof niet dat Richard Gill de definitie van -//- wel begrijpt. Wat ik wel geloof is dat sommige mensen niet zeggen wat ze denken. Daar hebben wiskundigen in aanzienlijke mate last van. Of dat voor RG ook geldt dat weet ik niet. mvg, Jan

(a) Zeg wat je denkt
(b) Richard lijkt wel te begrijpen dat x^2 // x = x, terwijl jij daar moeite mee hebt.

NB. Mijn email van gisterenavond is echt nog van belang. Je maakte een opmerking over het gebruiken van informatie in expressies. Dat kan een stap naar begrip zijn.

PM. Dus bijgaand een betere Sky.pdf van vanochtend.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-05 11:02, JB wrote:

Laten we de punten een voor een behandelen: wat bedoel je met: T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0 Waar komt die 0 vandaan? Dat moet toch een reden hebben. Die kan ik niet zomaar zelf verzinnen. Bedoel je dat ALS simplify[P] == 0 dan P gesloten. Dat is als bewering onjuist. [36] De andere kant uit (ALS P gesloten dan simplify[0]0

[36] There is a test on being zero. There is no test on being a closed expression. Why misunderstand ? Why read something else than what has been written ? I wrote "closed" ("geslotenheid") with quotation marks, summarizing a passage in the PDF of the article. Of course if x - x is an open expression then Simplify[x - x] = 0 doesn't make x - x closed. But if Bergstra confuses a test on zero with a test on being closed then perhaps the test on zero might be called a test on being "closed" ? But it seems that my effort here caused JB to focus on this, and interprete "closed" as closed.

== 0) is ook onjuist (daar hebben we immers simplify[2] == 2=/= 0). [37] En dan ben ik uitgepraat met de term "toets" ik kan niet meer bedenken wat je mogelijk kunt bedoelen. EN is het volgende nou juist of niet: simplify(P) is de unieke Q zodat P.x//x >== Q. [38] Helemaal los van de vraag of het relevant is? mvg Jan

At 2012-07-05 11:23, TC wrote:

Dag Jan,

(a) Simplify is geen toets op openheid of geslotenheid.

Ik speel slechts in op het punt dat jij alleen open versus gesloten kent, zodat jij niet kunt concluderen dat x - x = 0, omdat x - x voor jou een open uitdrukking is.

Het gaat om de toets of de noemer nul is of niet.

Als n de noemer is, dan accepteren we dat n = 0 desda Simplify[n] = 0.

Dus we accepteren dat een noemer x - x eigenlijk voor een nul staat desda Simplify[x - x] = 0. Voor jou is 0 wel weer gesloten, zodat je kunt accepteren dat er een gesloten 0 gevonden is.

Ik heb nooit beweerd dat Simplify[x] = 0 een toets op open of geslotenheid is. Dat je dit hebt begrepen, wijs ik weer toe naar het blijkbaar drukke leven van de manager. Dat je dit verkeerd hebt begrepen, verklaart voor mij dat je die opmerking over Simplify[2] maakte.

(b) simplify(P) is de unieke Q zodat P.x//x >== Q ?

Nee, absoluut niet. Een voorbeeld is dat Simplify[x^2 / x] = x.

PM. Eerder was je bereid om Simplify te accepteren. Je verwees naar bijv. Mathematica met versie nummer. Ligt dit nu weer open ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-05 14:02, JB wrote:

Het spijt me, ik heb het niet te druk, ik lees gwoon letterlijk wat jij schreef: >T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0. Dat formuleer je nu anders: "dat een noemer x - x eigenlijk voor een nul staat desda Simplify[x - x] = 0"

OFWEL t.b.v. de toets ëigenlijk voor een 0 staan"gebruik ik Simplify[x - x] = 0".

Wat betreft: simplify(P) is de unieke Q zodat P.x//x == Q ? (OFWEL: simplify(P) == (P.x)//x, dit is nog eenvoudiger) simplify[x^2/x] = simplify[(x.x)/x] == (((x.x)/x).x)//x == x dat lijkt dus wel te kloppen. Ik verwees naar mathematica, maar jij doet dat niet (in de definitie). Dus ligt het m.i. weer open. mvg Jan

At 2012-07-05 14:43, TC wrote:

Dag Jan,

Zou het dan mogelijk zijn de PDF van vanochtend te bekijken ?

[37] Why would a closed expression be zero ? Who ever would suggest that ?

[38] I have not suggested this. It is not clear why Bergstra would suggest it. A simply example of P = x-x would show that including x // x is not material for the simplification. Why introduce noise ?

Het A4 is op pag 7. Dat verwijst wel naar Simplify op pag 5.

Hieronder dan nog korte reacties op de misverstanden.

Er is een beweging gaande, waarin ik resultaten in de PDF verzamel, denkend dat er convergentie is, terwijl jij je gaat concentreren op de korte samenvattingen in de emails, welke misverstanden genereren.

Met beste groet,

Thomas

At 14:02 2012-07-05, you wrote:
Het spijt me, ik heb het niet te druk, ik lees gwoon letterlijk wat jij schreef:

>T.b.v. de toets op "geslotenheid" gebruik ik nu Simplify[x - x] = 0.

Nou ja, "t.b.v." is niet "als".

Dat formuleer je nu anders: "dat een noemer x - x eigenlijk voor een nul staat desda Simplify[x - x] = 0"

OFWEL t.b.v. de toets ""eigenlijk voor een 0 staan"gebruik ik Simplify[x - x] = 0".

Dit is meer in het algemeen: noemer = 0 desda Simplify[noemer] = 0.

Zie die PDF op pag 5.

Met als voorbeeld noemer = x - x.

Dit is niet "anders formuleren". Zie het als een verschil tussen een samenvatting in een email en de langere uitwerking in de PDF.

Wat betreft: simplify(P) is de unieke Q zodat P.x//x == Q ?

(OFWEL: simplify(P) == (P.x)//x, dit is nog eenvoudiger)

Nogmaals, dat is jouw interpretatie van wat ik voorstel.

Ik heb het niet in jouw termen gedefinieerd, dus vraag mij daar geen oordeel over.

Ik ben een beetje bekend met de gegeneraliseerd inverse in de lineaire algebra, maar zou dat weer moeten opzoeken.

Wellicht zou jij kunnen denken aan een deling /:/ zdd P /:/ Q = P / Q * z / z = z voor geschikte z. Maar wanneer ik zulke voorstellen zou doen, dan zou ik me in field vs meadow moeten verdiepen. Vooralsnog lijkt het mij efficienter om uit te leggen wat ik met dynamisch quotient en flexibel domein bedoel, omdat dit toch de soort uitleg is die voor de leerlingen is bedoeld. Wanneer je begrijpt wat ik bedoel, dan zou je zelf die poging kunnen doen om het naar field vs meadow te vertalen.

simplify[x^2/x] = simplify[(x.x)/x] == (((x.x)/x).x)//x == x dat lijkt dus wel te kloppen. Ik verwees naar mathematica, maar jij doet dat niet (in de definitie). Dus ligt het m.i. weer open. mvg Jan

Jawel, ik had al gezegd dat dit voor mij in algemene zin acceptabel was, bijv. een verwijzing naar schoolwiskunde of meer generiek voor computer algebra systemen (CAS), zoals nu op pag 5 in het PDF. Waarbij men om concreet te blijven natuurlijk altijd een concrete keuze moet doen.

> Dat is voor mij reden ook vast te houden aan het manipuleren van het domein: want dat is een minimale eis waaraan zo'n proces toch wel moet voldoen. Mathematica kijkt bij Simplify niet naar het domein maar ik kan me een CAS voorstellen dat dit wel doet en dan een andere uitkomst geeft.
>
> Met beste groet,
>
> Thomas

At 2012-07-06 01:47, JB wrote:

in de 2e pdf heb ik commentaar De discussie over SM en PM blijft moeilijk te volgen: je plaatst PM (nu even door mij gerepresenteerd) in de hoek van iemand die om formalisering vraagt. Maar je erkent niet dat deze vraag voortkomt uit feitelijk onvermogen om te begrijpen wat je schrijft.

OP blz. 3 schrijf je "x and y are variables but of course they can be expressions". Dat is ok, maar dan is er nog steeds iets mis met je centrale definite: Definition of the dynamic quotient To make it strict, let y / x be as commonly used and the dynamic quotient y // x be the following process or program: y // x =def= { y / x, unless x is a variable and then: assume x =!= 0, simplify the expression y / x, declare the result valid also for the domain extension x = 0 }.

WANT: bekijk (x+x)//(x+x) dat wordt (x+x)/(x+x) want x+x is NOT a variable. [39] Maar dat klopt niet want je wilt dat er 1 uitkomt, en dat is in de wereld der expressies iets anders. op de laatse blz. 1) S_7 is geen verzameling (althans ik zie niet welke), 2) en daarmee heeft -//'- geen type. mvg, Jan

At 2012-07-06 10:57, TC wrote:

Beste Jan,

> At 01:47 2012-07-06, you wrote:
> in de 2e pdf heb ik commentaar De discussie over SM en PM blijft moeilijk te volgen: je plaatst PM (nu even door mij gerepresenteerd) in de hoek van iemand die om formalisering vraagt. Maar je erkent niet dat deze vraag voortkomt uit feitelijk onvermogen om te begrijpen wat je schrijft.

Wanneer ik straks begrijp wat er niet te begrijpen viel dan valt dat makkelijker te expliciteren.

Vooralsnog ga ik van de veronderstelling uit dat PM ooit een SM diploma hebben gehaald en zich dus in mijn probleem zouden moeten kunnen verplaatsen. Zoals ook Wu opmerkt blijkt dat niet vanzelfsprekend. Maar ik neem aan dat het niet generiek is, en afhankelijk is van het onderwerp. Zoals dynamische deling een apart onderwerp is, en bovendien nieuw voor SM.

> OP blz. 3 schrijf je "x and y are variables but of course they can be expressions". Dat is ok, maar dan is er nog steeds iets mis met je centrale definite: Definition of the dynamic quotient To make it strict, let y / x be as commonly used and the dynamic quotient y // x be the following process or program: y // x =def={ y / x, unless x is a variable and then: assume x =!= 0, simplify the expression y / x, declare the result valid also for the domain extension x = 0 }. WANT: bekijk (x+x)//(x+x) dat wordt (x+x)/(x+x) want x+x is NOT a variable. Maar dat klopt niet want je wilt dat er 1 uitkomt, en dat is in de wereld der expressies iets anders.

Op pag 3 is het SM en reduceert x + x = 2 x, zodat het weer variabel is.

---

[39] This is invalid. The denominator is d = 2x and d is variable and not a constant.

Op pag 7 probeer ik je te volgen in PM en wordt het Simplify[x + x] = 2 x en aldus een open expressie die niet gelijk nul is.

> op de laatse blz. 1) S_7 is geen verzameling (althans ik zie niet welke), 2) en daarmee heeft -//'- geen type. mvg, Jan

S1 t/m S7 zijn als uienschillen, waarin steeds wat wordt toegevoegd.

S1 begint met de verzameling der reals, en bijgevolg moet S7 ook een verzameling zijn.

Fijn dat je nu naar de pdf kijkt.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-06 14:01, JB wrote:

Ik reageer even op je laatste opmerking: S7 kwalificeert op geen enkele wijze als definite van een verzameling, het spijt me. Stap voor stap zou duidelijk moeten zijn welke verzameling aan de orde is.

Wat betreft x+x=2x, zeker maar ook 2x is geen variabele. Jouw definitie levert 2x//2x == 2x/2x en dat is NIET wat je volgens mij bedoelt. mvg, Jan [40]

At 2012-07-06 15:57, TC wrote:

Dag Jan,

> At 14:01 2012-07-06, you wrote:
> Ik reageer even op je laatste opmerking: S7 kwalificeert op geen enkele wijze als definite van een verzameling, het spijt me. Stap voor stap zou duidelijk moeten zijn welke verzameling aan de orde is.

Wees ervan verzekerd dat ik besef dat een volledige uitwerking van een formele definitie voor een computer algebra systeem een hele andere koek is dan wat ik daar heb geformuleerd als stappen. Ik reken op een zekere welwillendheid, dat men ziet dat die stappen daartoe zouden leiden.

> Wat betreft x+x=2x, zeker maar ook 2x is geen variabele. Jouw definitie levert 2x//2x == 2x/2x en dat is NIET wat je volgens mij bedoelt. mvg, Jan

Neen, dat heb je dan in ieder geval verkeerd gelezen, zie de definitie van Simplify:

(x + x) // (x + x) = Simplify[Simplify[x + x} / Simplify[x + x]] = Simplify[2 x / (2 x)] = 1

waarbij er geen oneindige loop ontstaat doordat links // staat en rechts /.

Belangrijke vraag is dan: is het werkelijk nodig dat ik die verzameling van reele getallen en symbolen en de expressies daarvan zo probeer op te schrijven dat je begrijpt wat de bedoeling is ? Of zou je zelf zo'n poging willen wagen ? Jij bent beter thuis in wat je accepteert dan ik.

Met beste groet,

Thomas

---

[40] JB refuses to see that the denominator is a variable.

At 2012-07-06 16:26, JB wrote:

Het spijt me: y//x = y/x unless x is a variable (jouw definite), dus (x+x)//(x+x) = (x+x)/(x+x) want x+x is not a variable. [41] Uitdrukkelijk staat in jouw definitie niet dat je simplify(y/x) oplevert als x geen variabele is. [42] Dat had ook gekund en is mischien wat je bedoelde maar het staat er niet. Verder: "zien" is geen kwestie van welwillendheid, was het maar zo eenvoudig. [43] Wat betreft de verzamelingen: Ik aarzel om met de definites zelf aan de gang te gaan. Jij weet toch wel wat een verzameling is en jij weet ook dat de term layers niet zomaar voor verzamelingen staat. Je suggereert dat dit een mate van subjectiviteit heeft als of ik een eigen opvatting over verzamelingen zou hebben, maar dat is echt niet het geval. In S1-S7 op jouw p.7 heb ik bij S3 al geen enkel idee van wat voor verzameling dat zou kunnen zijn. Ook niet waarom er zoveel domains zouden zijn (is er meer dan Reals en Reals/{0}), ook niet wat "that may symbolic too" betekent. Bij S5 is nodig te weten welke operators en constants er zijn. Bij S6 weet ik net wat "defined on variables and using expressions" betekent. mvg, Jan

At 2012-07-06 16:32, TC wrote:

Dag Jan,

Even snel:

> At 16:26 2012-07-06, you wrote:
> Het spijt me: y//x = y/x unless x is a variable (jouw definite), dus (x+x)//(x+x) = (x+x)/(x+x) want x+x is not a variable. Uitdrukkelijk staat in jouw definitie niet dat je simplify(y/x) oplevert als x geen variabele is. Dat had ook gekund en is mischien wat je bedoelde maar het staat er niet.

Je verwijst hier naar de definitie in SM. Dan is teller // noemer = tellen / noemer tenzij de noemer een variabele is. In jouw voorbeeld is noemer = x + x = 2 x en dus is de noemer een variabele.

In SM geldt dat y = f[x] geldt als variabele ook al is f[x] een expressie.

Voor jou heb ik het op pag 7 netjes gemaakt door er inderdaad Simplify omheen te leggen.

Voor even,

Thomas

At 2012-07-06 16:53, JB wrote:

He spijt me: 2x is geen variabele. Het is een open term (open expressie, expressie met vrije variable, niet gesloten expressie) maar het is geen variabele. Heeft SM eigen opvattingen over wat een variabele is? Dat lijkt me niet erg praktisch. mvg, Jan

At 2012-07-06 21:00, TC wrote:

---

[41] The definition uses y for the numerator and x for the denominator. It tests on whether the denominator is a variable. If the denominator has been set to an expression, it can still be a variable. In the example d = x+x then d = 2x and clearly d is a variable and not a constant.

[42] Why should it be relevant to render Simplify[y/x] when x is not a variable ? The dynamic quotient is not a simplication procedure itself !

[43] While the original definition is for school mathematics (SM), the new more formal definition for a sky introduces the explicity Simplify function, and now JB confuses the latter and requires it for SM ..

Dag Jan,

Voor noemer n = 2x geldt dat n beschouwd wordt als een variabele.

In een diagram van {noemer, teller} = {n, t}, krijgt elke dimensie een as.

In SM kunnen teller en noemer als variabele aangeduid worden.

Ja, leerlingen op de middelbare school begrijpen dat.

En het is heel praktisch.

Voor de PM op pag 7 leg ik er nog een simplify omheen, en vermijd ik de term variabele, maar sluit ik aan bij jouw onderscheid tussen open en gesloten.

In de PDF maak ik een helder onderscheid tussen SM (waar COTP over gaat) en PM achterin (waar ik e.e.a. naar je vertaal).

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-06 21:14, TC wrote:

Dag Jan,

Ik kan eraan toevoegen dat n = 3 wordt beschouwd als een constante, waarbij je altijd kunt zeggen dat n op zichzelf een variabele is die een constante waarde 3 heeft gekregen.

Maar in dit taalgebruik is n = 2x zonder meer een variabele. Of als je wilt, variabel.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-06 21:32, TC wrote:

Dag Jan,

Ik kan er nog aan toevoegen dat dit een herhaling van zetten is. We kwamen er al op bij x - x = 0. Hierdoor heb ik preciezer het verschil tussen SM en PM aangegeven, waardoor x - x = 0 voor SM geldt, ook zodat hier geen sprake is van een variabele, terwijl ik voor PM Simplify[x - x] = 0 gebruik. (Met hopelijk geen verwarring over "0" versus 0.)

Hopelijk is het helder, en kunnen we doorgaan met de verzamelingen ?

Het zou daarvoor het mooist zijn hoe jij domein en bereik van y / x = z aangeeft, waarin x, y en z allen reele getallen of expressies kunnen zijn, met deze laatste reele getallen, variabelen en operatoren. [44]

Het zou kunnen dat ik vervolgens weinig hoef te veranderen voor y // x = z om voor jou een begrijpelijk resultaat neer te zetten.

Met beste groet,

Thomas

[44] This is a suggestion that JB has never reacted to. So he leaves me guessing wat a reseach mathematician finds acceptable (and he knows that I am not a research mathematician).

At 2012-07-06 22:50, JB wrote:

Het spijt mij, maar als we SM en PM onderscheiden dan onderscheiden we vervolgens ook SMc (voor conventioneel) en SMtc (jouw versie). In SMc is 2x geen variabele. 2x is natuurlijk wel variable, maar dat is toch echt wat anders. [45] In SMc is variabele NIET een afkorting voor open expressie. Wat mij betreft zetten we SMc en SMtc tegenover elkaar, er is voor mij werkelijk geen grond om met het idee mee te doen dat ik niet zou weten hoe de schoolwiskunde werkt. [46] in SMc is de definitie van y//x die jij geeft onjuist! Dat vanwege het voorneeld waarmee we steeds werken. Het is voor mij moeilijk te begrijpen dat jij de terminologie van de schoolwiskunde eigenstandig wijzigt alsof dat geen verklaring vergt. In ieder geval zijn we aan het contrast tussen SMtc en PM nog helemaal niet toe. mvg, Jan

At 2012-07-06 23:23, TC wrote:

Dag Jan,

Neen, zowel voor y / x als y // x gebruik ik de normale SM = SMc.

Hierbij is y de teller en x de noemer. De breuk is gedefinieerd met twee variabelen, teller en noemer.

De noemer kan een uitdrukking zijn zoals 2z maar dan blijft x een variabele met waarde x = 2z.

Inderdaad is SM verwarrend t.a.v. onderscheid in Mathematica tussen =, == en ===, maar leerlingen kunnen dat blijkbaar aan (of niet).

Het doet me deugd dat je akkoord gaat met de gedachte dat x = 2z variabel is. Als dat bijdraagt tot begrip dan is dat nu een formulering waar we ons voordeel mee kunnen doen.

Maar het blijft goed zoals ik het formuleerde.

Ik ben blij dat je nu schrijft dat je weet wat SM is. Tot op heden had je de neiging om onduidelijkheden en conventies in SM te gebruiken als een soort kritiek op mijn nieuwe aanpak van y // x. Hebben we nu begrip bereikt ? Maar nu je een onderscheid aanbrengt tussen SMc en SMtc lijkt het erop dat je SM toch niet goed begrijpt ...

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-07 00:17, JB wrote:

Hoe het ook zij in school mathematics is 2x geen variabele. Echt niet!! Alleen een kale x of y is een variabele. Dat het een variabele grootheid is, daar kan ik mee werken maar dan moet de definitie van y//x aangepast worden. Kortom het blijft fout zoals jij het formuleerde. [47] Deze details zijn essentieel. Ik maak het onderscheid tussen SMc en SMtc omdat de P niks met

---

[45] The paper now explains that the syntactic test “x is a variable” does not allow the substitution of an expression x = 2a, creating “2a is a variable”, since you cannot do this for syntactic tests. It is quite true that 2a is variable and that 2a is not a variable. But if denominator x = 2a then the denominator still will be a variable and not a constant. If the denominator is a constant then *x* is a constant and the syntactic test “x is a variable” will be false. One should not take the equation *x* = *c* and hold that *x* still is a variable. If the denominator is a constant then the relation is *x* := *c* .

[46] He knows a parts about school mathematics but claims too much, see this very example.

[47] For JB it is important that the original definition would be wrong, and it is not important that I am willing to go along with a definition that he can live with. For him it is important that his RM approach is accepted as proper SM, and he leaves me no room to discuss SM with fellow SM.

deze materie te maken heeft. Als SM schoolwiskunde is dan zijn we op zoek naar wat dat is, de idee dat jij dat als enige weet is niet een voor de hand liggend uitgangspunt. mvg, Jan

At 2012-07-07 10:48, TC wrote:

Dag Jan,

Je geeft mijn woorden verkeerd weer.

In SM is x een variabele, ook als deze de waarde x = 2z krijgt.

Dit ter onderscheid van x = 3, waarbij het de gewoonte is te zeggen dat x dan een constante waarde heeft of zelfs een constante is. Bijvoorbeeld in a x^2 + b x + c = 0 dan kunnen a, b en c constanten zijn.

In SM kan de breuk gedefinieerd worden met teller y en noemer x, zodat y / x. Wanneer dan voor de noemer x = z + z wordt gesubstituteerd dan blijft x = 2z een variabele.

Ja, een uitdrukking als "2z" op zichzelf beschouwd is geen variabele. Dat heb ik nooit beweerd. Ik heb dat alleen aangegeven in de context van substitutie in teller of noemer.

De definitie van y // x is dus goed.

Ik heb er geen moeite mee om in de Reading Notes een opmerking toe te voegen dat PM in plaats van "a variable" graag alleen "variable" lezen.

Het is niet nodig te suggereren dat ik denk dat alleen ik weet wat SM is. Dat is toch een rare opmerking ? Dat doet afbreuk aan het respect dat je me toch zou willen tonen.

Bekijk eens dit probleem. Laat x een variabele zijn en laat een uitdrukking zijn a^2 + a. Laat gelden dat x = a^2 + a. Hierbij heeft "=" de betekenis van "is identiek aan". Het domein voor a is R. Blijkbaar is het mogelijk om x op te vatten als een functie van a, dus x = x[a] = a^2 + a. Klaarblijkelijk kan een functie ook een variabele zijn ? Nogmaals, er was identiek zijn, dus zulke conclusies lijken onvermijdelijk. Dus zeggen dat alleen een losstaande x een variabele is stuit op het probleem dat ook x[a] een variabele is. Kortom, SM zit vol met dit soort "paradoxen", die alleen ontstaan doordat niet alles zo streng wordt opgebouwd als in PM. Ik ben zelf voorstander van wat meer strengheid in SM. Maar voorlopig lost SM zulke paradoxen op door er niet naar te kijken en geen vragen wakker te roepen. Dat gezegd zijnde, volgt y // x de definitie van y / x door teller en noemer als aparte variabelen op te vatten.

At 2012-07-07 12:27, JB wrote:

Het spijt me, de door jou gegeven definitie y//x = {y/x tenzij x een variable is, in welk geval ZZZ} levert onontkoombaar op dat (x+x)//(x+x) == (x+x)/(x+x) OMDAT x+x GEEN variabele is. Wat kan ik daar nou verder over zeggen of bedenken? [48] Als je iets anders bedoelt dan je in de definitie schrijft dan is het toch nodig om ook wat anders te schrijven, namelijk dat te schrijven wat je bedoelt te zeggen. B.v. y//x = {y/x tenzij x een variable GROOTHEID is, in welk geval ZZZ} of equivalent y//x = {y/x wanneer x een constante waarde heeft, en anders ZZZ} Dit heeft niets met "het onderwijs" te maken, of met wat leerlingen wel of niet begrijpen. mvg, Jan

At 2012-07-07 12:37, JB wrote:

Wat is overigens x//(x.x)? levert dat 1/x, zo ja, dan blijkt daarmee dat in de range van -//- expressies met / erin voorkomen. Zo ja, wat betekent dan "declare the result valid for the

[48] An option might be to listen better to what I have explained. Or, when I agree to accept “variable” instead of “a variable” to accept this and not to return to the original definition that says “a variable”.

domain (VAN WAT) extension x.x=0" in dit geval. Deze zin met "declare.." kan aan de definite van -//- niets toe of af doen. Het is een soort van zijeffect, maar het draagt niet bij aan de vorming van een expressie. Dat brengt mij op de volgende vorm van de definitie van -//-: y//x = {y/x als x een constante waarde heeft, zo niet vereenvoudig dan z verkregen met (simplify of schoolwiskunde) vanuit als resultaat van vereenvoudiging van x/y} Hier zijn x,y,z metavariablen die staan voor expressies. Dat kan natuurlijk. mvg Jan

At 2012-07-07 13:17, TC wrote:

Dag Jan,

Je hebt hopelijk toch wel gezien dat de definitie van y // x op pag 2 in SM een parallel vindt in de definitie van P //' Q op pag 7 voor PM ?

In PM (mijn PDF pag 7) maak ik expliciet onderscheid tussen primitieve variabelen x y z en variabelen voor expressies P Q R. In SM is er dat onderscheid niet. Mijn houding is dat SM eigenlijk P Q R gebruikt, omdat P = x natuurlijk ook een expressie is. Dus SM gebruikt x y z als zulke metavariabelen en noemt ze variabelen.

> At 12:37 2012-07-07, you wrote:
> Dat brengt mij op de volgende vorm van de definitie van -//-: y//x = {y/x als x een constante waarde heeft, zo niet vereenvoudig dan z verkregen met (simplify of schoolwiskunde) vanuit als resultaat van vereenvoudiging van x/y} Hier zijn x,y,z metavariablen die staan voor expressies. Dat kan natuurlijk. mvg Jan

(a) Ik kan in de Reading Notes opnemen dat dit zo gelezen moet worden, met nog een opmerking t.a.v. het domein hieronder.

(b) Misschien kun je de onduidelijkheid van "vanuit als resultaat" wegnemen.

(c) Beschouw je noemer en teller als "metavariabelen" ? Dus SM gebruikt x y z als zulke metavariabelen en noemt ze variabelen.

Wanneer je dit begrijpt, welke bezwaar is er dan om onderscheid te maken tussen x = P = constante en x = P =/= constante, en dan te zeggen dat dit een (echte) variabele is ?

> Wat is overigens x//(x.x)? levert dat 1/x, zo ja, dan blijkt daarmee dat in de range van -//- expressies met / erin voorkomen. Zo ja, wat betekent dan "declare the result valid for the domain (VAN WAT) extension x.x=0" in dit geval. Deze zin met "declare.." kan aan de definite van -//- niets toe of af doen. Het is een soort van zijeffect, maar het draagt niet bij aan de vorming van een expressie.

x // (x.x) = 1 / x waarbij eerst het domein van x ontdaan is van nul en daarna weer uitgebreid met nul.

De reden voor de manipulatie met het domein heb ik eerder uitgelegd.

Het is vooral ter bescherming voor de gedachte dat toch door nul gedeeld wordt of kan worden. Dat wordt expliciet uitgesloten.

Bijvoorbeeld zou iemand kunnen overwegen x // x voor x in {0}. Wanneer het domein er niet bij wordt betrokken dan zou generiek de conclusie luiden dat 0 // 0 = 1, en die generieke conclusie kan niet worden getrokken, omdat x / x voor x in {} niet gedefinieerd is.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-07 14:12, JB wrote:

Het spijt me, maar ik kijk toch naar je primaire tekst. [49] [50] Die is bij de definitie van -//- voor mij onleesbaar om tenminste drie redenen die we elk al eerder hebben besproken, maar die ik hier nog even herhaal:

(i) door ONJUIST gebruik van de term variabele, dat kan anders maar dan moet je het ook veranderen, wat je nu schrijft is onbegrijpelijk. Want x+x is GEEN variable.
(ii) door niet direct relevante stappen (binnen de definitie) inzake domeinen. Er komt een expressie uit, geen domein. Hoe die expressie tot stand is gekomen is niet van belang voor het resultaat.

(iii) door de te gemakkelijke verwijzing naar simplify. Dat past niet in een gewone tekst om te lezen. Dan is een bewering nodig over de eenduidigheid van het resultaat. Dat ontbreekt ten ene male. Daar zit allereerst de betekenis (noodzaak) van de import van Mathematica! Qua intuitie is het allerminst duidelijk wat -//- moet opleveren, er is geen sprake van dat ik weet wat er allemaal uit moet komen: (x+x)//1 == 2x? (2+2)//1 == 4? (10.10.x)//x == 100? (of 100) (exp(2,exp(2,exp(2,100))).x)//x = ?? (ik zou het echt niet weten!) wortel(x)//wortel(x) ==1? wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) == 1/x? enz.

VOORTS: (iv) de idee dat reading notes een onleesbare definitie leesbaar kunnen maken deel in allerminst.

(v) SM moet het verschil tussen variabelen en metavariablene niet ontkennen dan wordt het nog moeilijker. mvg, Jan

At 2012-07-07 15:24, TC wrote:

Dag Jan,

Je voorbeeld van wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) == 1/x is nuttig omdat het verduidelijkt dat domeinen voor de vereenvoudiging relevant kunnen zijn. Als x > 0 dan is wortel((-x)^3) niet gedefinieerd en kun je je afvragen of er uit zo'n breuk zinvolle antwoorden kunnen komen. Voor x < 0 is een uitkomst 1 / x verdedigbaar, en het lijkt me uitbreidbaar met nul. Zie hier inderdaad de uitdagingen waarvoor SM zich gesteld ziet.

Het zou kunnen dat SM het onderscheid tussen primaire variabelen en variabelen voor expressies verstopt in begrip "gebroken functies". Ik heb dit niet systematisch onderzocht. In de PDF heb ik een pagina van Alders uit 1965 afgedrukt. Hij gebruikt ook een functie, en gebruikt dat teller en noemer wel of niet nul zijn. Voor jou is 2 - 2 een expressie maar voor Alders is het gewoon 0.

[2016: De prent van Alders is ook opgenomen op pag 16 http://thomascool.eu/Papers/Math/2014-09-08-Sky-Field-Meadow.pdf]

Ik stel voor je opmerkingen hieronder t.a.v. mijn oorspronkelijke formulering voor SM te noteren.

Mijn voorstel is dan over te gaan op mijn poging voor jou de bedoeling te verduidelijken, op pag 7 van de PDF. Jouw probleem daar was dat je niet ziet hoe een verzameling S ontstaat.

Een tweede poging van me zal succesvoller kunnen zijn wanneer jij zou aangeven hoe jij dan zelf je domein beschrijft voor jouw functie P / Q waarbij P en Q expressies zullen zijn

---

[49] Why return to the original definition in COTP when I have indicated that it is okay to read "a variable" as "(a) variable" ?
[50] In itself it is fair to return to the original definition, if one wishes to summarize one’s position. But it is strange to hold that “Reading Notes” cannot clarify sources for confusion. And the position of course neglects the explanations given: that there is a good reason for “a variable”, for domain manipulation, that SM has various practical solutions for simplify.

bestaande uit getallen, primaire variabelen en operatoren. Ik ben met name benieuwd naar de behandeling van de domeinen voor de variabelen. [51]

Met beste groet,

Thomas

At 14:12 2012-07-07, you wrote:
Het spijt me, maar ik kijk toch naar je primaire tekst. Die is bij de definitie van -//- voor mij onleesbaar om tenminste drie redenen die we elk al eerder hebben besproken, maar die ik hier nog even herhaal: (i) door ONJUIST gebruik van de term variabele, dat kan anders maar dan moet je het ook veranderen, wat je nu schrijft is onbegrijpelijk. Want x+x is GEEN variable. (ii) door niet direct relevante stappen (binnen de definitie) inzake domeinen. Er komt een expressie uit, geen domein. Hoe die expressie tot stand is gekomen is niet van belang voor het resultaat. (iii) door de te gemakkelijke verwijzing naar simplify. Dat past niet in een gewone tekst om te lezen. Dan is een bewering nodig over de eenduidigheid van het resultaat. Dat ontbreekt ten ene male. Daar zit allereerst de betekenis (noodzaak) van de import van Mathematica! Qua intuitie is het allerminst duidelijk wat -//- moet opleveren, er is geen sprake van dat ik weet wat er allemaal uit moet komen: (x+x)//1 == 2x? (2+2)//1 == 4? (10.10.x)//x == 100? (of 100) (exp(2,exp(2,exp(2,100))).x)//x = ?? (ik zou het echt niet weten!) wortel(x)//wortel(x) ==1? wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) == 1/x? enz. VOORTS: (iv) de idee dat reading notes een onleesbare definitie leesbaar kunnen maken deel in allerminst. (v) SM moet het verschil tussen variabelen en metavariablene niet ontkennen dan wordt het nog moeilijker. mvg, Jan

At 2012-07-07 15:54, TC wrote:

Dag Jan,

> At 15:24 2012-07-07, TC wrote:
> Je voorbeeld van wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) == 1/x is nuttig omdat het verduidelijkt dat domeinen voor de vereenvoudiging relevant kunnen zijn. Als x > 0 dan is wortel((-x)^3) niet gedefinieerd en kun je je afvragen of er uit zo'n breuk zinvolle antwoorden kunnen komen. Voor x < 0 is een uitkomst 1 / x verdedigbaar, en het lijkt me uitbreidbaar met nul. Zie hier inderdaad de uitdagingen waarvoor SM zich gesteld ziet.

Voor x < 0 moet de uitkomst 1 / Abs[x] zijn want het resterend kwadraat geeft een positief getal en de wortel uit een positief getal is weer positief.

Bovendien hanteerde ik het onderscheid tussen x < 0 waardoor onduidelijk is wat er gebeurt bij x = 0, ook al is de uitkomst dan niet gedefinieerd, versus het expliciteren dat de uitkomst bij x = 0 niet gedefinieerd is. Maar het kan zijn dat dit teveel fijnproeverij is.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-07 16:08, JB wrote:

Met alders heb ik geen probleem, die gebruikt de notie "variabele" niet en gebruikt 'm dus ook niet verkeerd. Verder blijven al mijn andere opmerkingen staan. Wat is nu voor jou de uitkomst bij elk van mijn voorbeelden? Je geeft een definitie van -//- dus je moet toch zelf weten wat er uit komt. Die antwoorden te kennen is mijn enige kans om te begrijpen wat je bedoelt, want zoals gezegd kan ik de definitie om (minstens) drie redenen niet begrijpen. Als die voorbeelden vragen oproepen, b.v. omdat SM voor een vraag gesteld wordt, dat geeft niet maar dan is er natuurlijk ook niet van een definitie sprake. Want zo'n deinitie lost die vragen juist op. mvg Jan

---

[51] JB has never done that.

At 2012-07-07 16:12, JB wrote:

maar wat is nu wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) ? kom jij op: wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) == 1/abs[x]? Prima maar daar hoort geen gevalsonderscheiding bij, -//- levert een expressie, of is als{x<0}dan{P}anders{Q} ook een expressie, en ga jje er van uit dat SM zulke expressies oplevert? mvg, Jan [52]

At 2012-07-07 17:19, TC wrote:

Dag Jan,

Vanaf mijn introductie van SM en PM probeer ik je duidelijk te maken dat je geen expert bent t.a.v. SM. Veel van deze discussie wordt veroorzaakt doordat je denkt dat je dit wel bent, en probeert mij duidelijk te maken dat ik juist degene ben die iets over het hoofd ziet en dus niet weet wat SM is.

Bijvoorbeeld:

> At 16:08 2012-07-07, you wrote:
> Met alders heb ik geen probleem, die gebruikt de notie "variabele" niet en gebruikt 'm dus ook niet verkeerd.

Dit is een onjuiste constatering. Alders gebruikt de termen teller en noemer. In mijn notatie van y / x en y // x is y de teller en x de noemer. Er is hier geen verschil. [53]

> >Verder blijven al mijn andere opmerkingen staan. Wat is nu voor jou de uitkomst bij elk van mijn voorbeelden? Je geeft een definitie van -//- dus je moet toch zelf weten wat er uit komt. Die antwoorden te kennen is mijn enige kans om te begrjpen wat je bedoelt, want zoals gezegd kan ik de definitie om (minstens) drie redenen niet begrijpen. Als die voorbeelden vragen oproepen, b.v. omdat SM voor een vraag gesteld wordt, dat geeft niet maar dan is er natuurlijk ook niet van een definitie sprake. Want zo'n deinitie lost die vragen juist op. mvg Jan

Mijn voorstel was jouw problemen met SM verder te laten liggen. Niet om ze te verwaarlozen maar ik kan daarover toelichtende opmerkingen maken in de Reading Notes.

Omdat jouw begrip gebaseerd is op pag 7 voor PM is mijn voorstel door te gaan met die pagina. En de vraag was of je het domein van P / Q zou kunnen geven, waarbij P en Q expressies zullen zijn bestaande uit getallen, primaire variabelen en operatoren. Ik ben met name benieuwd naar de behandeling van de domeinen voor de variabelen.

PM. Een ander voorbeeld:

> At 16:12 2012-07-07, you wrote:

---

[52] I had said “Voor x < 0 moet de uitkomst 1 / Abs[x]” and indeed SM should be able to see where the expression is defined. If JB knows SM then he acts as if I wouldn’t.

[53] There is on this point (“hier”) no difference in distinguishing numerator and denominator (y versus x). In the paper I add the caveat. “We may also try to understand what is implied for the “(a) variable” issue. This is not a historical question about Alders but a question about what is implied in the analysis. Since he allows that numerator and denominator are zero separately, implicitly they are separate functions (of expressions). He may not make the distinction in chosing a variable or a constant, but this is implicit in say *y* = *f*[*z*] where *y* clearly is a variable. He may not have an algebraic view, and regard *y* / *x* only as defined for *y* and *x* as chosen constants, for any value in their domain. However, “choosing any value” is generally understood as having a variable. He also allows for algebraic simplifcation in the no-problem area, otherwise we would require numerical limits there too. Thus implicitly there is an algebraic approach. What is only missing is the algebraic manipulation of the domain of the denominator.”

> maar wat is nu wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) ? kom jij op: wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) == 1/abs[x]? Prima maar daar hoort geen gevalsonderscheiding bij, -//- levert een expressie, of is als{x<0}dan{P}anders{Q} ook een expressie, en ga jje er van uit dat SM zulke expressies oplevert? mvg, Jan

In SM leren leerlingen te onderscheiden naar domeinen. Helaas krijgen zij geen propositionele logica, maar gevalsonderscheiding wordt wel weergegeven, op andere wijze.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-07 20:34, JB wrote:

Als SM iets is dat jij alleen zelf mag begrijpen, dan zal ik er niet verder op ingaan, maar dat geldt dan toch ook voor alle andere tekst die je me opstuurde. Je schrijft toch met de bedoeling dat een ander het kan lezen. [54] Teller en noemer is iets anders dan variabele. [55] Ik zie natuurlijk ook dat Alders over teller en noemer spreekt maar dat was niet aan de orde. [56] Het gaat om de term variable die in SM onjuist wordt gebruikt. [57] Ik ga er van uit dat ik probeer te lezen wat jij mij toestuurde, daar speelt -//- een duidelijke rol en dat wil ik proberen te berijpen. Ik wil liever geen tijd steken in pagina's die ik deels zelf heb gemaakt. Wat is nu het resultaat van de volgende zeven toepassingen van -//-
(x+x)//1
(2+2)//1
(10.10.x)//x
(exp(2,exp(2,exp(2,100))).x)//x
wortel(x)//wortel(x)
wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5)
((exp(x,y).exp(z,y))//(x.x)
dat kan twee kanten uit: ((exp(x,y-2).exp(z,y)) en (exp(x.z,y))//(x.x) mvg, Jan

At 2012-07-08 12:24, TC wrote:

Dag Jan,

> At 20:34 2012-07-07, you wrote:
> Teller en noemer is iets anders dan variabele. Ik zie natuurlijk ook dat Alders over teller en noemer spreekt maar dat was niet aan de orde. Het gaat om de term variable die in SM onjuist wordt gebruikt. [58]

---

[54] JB seems to suggest that if I do not agree with his perception of SM then it is no use reading my papers.

[55] This is perhaps complex. One can conceive of a definition of the quotient in which y / x are placeholders that can be replaced with proper expressions. In an equational format it would even be possible to say y = expr1 and x = expr2. Placeholders can be indexed to find the proper places. They can be qualified for certain types (integer, real) or sets. Whence they are indistinguishable from variables. Perhaps “metavariables” again, see my comment At 2012-07-07 13:17. But then JB At 2012-07-07 14:12 claims that “SM moet het verschil tussen variabelen en metavariablene niet ontkennen dan wordt het nog moeilijker. “ He ought to accept that SM doesn’t know that term so that “variable” is acceptable. However, in the original definition of the dynamic quotient, the numerator and denominator are chosen as a constant or a variable, so the student has clarity.

[56] Not at issue ? But the very definition of the dynamic quotient refers to it !

[57] It has been explained that the use is proper. I indicated however that there would be no loss if "a variable" is replaced by "variable". Why not get the argument and return to this ?

[58] JB apparently is not aware of the Van Hiele theory of levels of understanding, that requires that definitions in SM fit with what students understand. He wants to introduce the notion of “meta-variables” in SM, for expressions, but students already are supposed to know functions, and that suffices.

Het is wel aan de orde. Waar Alders teller en noemer gebruikt, gebruik ik de symbolen y en x.

Eventueel zou jij als PM de term "metavariabele" willen gebruiken omdat teller en noemer ook expressies kunnen zijn, maar die term gebruiken we niet in SM.

In SM kun je wel zeggen dat een expressie variabel is, en gelijk kan worden gesteld aan een nieuwe variabele die niet in de expressie voorkomt, zodat de expressie identiek gelijk wordt aan die variabele, en daarmee zelf een variabele is geworden.

Voor Alders kan de noemer nul worden. Daar had jij grote moeite mee.

Waar Alders zou kunnen zeggen "noemer x is geen constante" dan is een equivalente uitspreek "noemer x is een variabele". [59]

Ik geef je alle ruimte om als PM aanvankelijk verbaasd te zijn over het gebrek aan onderscheid tussen metavariabele en variabele, maar deze uitleg moet voldoende zijn. Is het niet voldoende, dan is het een bewuste keuze het niet te willen begrijpen. [60]

> Ik ga er van uit dat ik probeer te lezen wat jij mij toestuurde, daar speelt -//- een duidelijke rol en dat wil ik proberen te berijpen. Ik wil liever geen tijd steken in pagina's die ik deels zelf heb gemaakt. [61]

Voor voortgang is het wel noodzakelijk. Je blokkeert begrip van y // x in SM. Laten we dan doorgaan met y //' x in PM, pag 7.

> Wat is nu het resultaat van de volgende zeven toepassingen van -//- (x+x)//1 (2+2)//1 (10.10.x)//x (exp(2,exp(2,exp(2,100))).x)//x wortel(x)//wortel(x) wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) ((exp(x,y).exp(z,y))//(x.x) dat kan twee kanten uit: ((exp(x,y-2).exp(z,y)) en (exp(x.z,y))//(x.x) mvg, Jan

Wat is de zin van deze voorbeelden ?

(x+x)//1 = 2x voor het domein van x

(2+2)//1 = 4

(10.10.x)//x = 100 voor het domein van x

(exp(2,exp(2,exp(2,100))).x)//x = exp(2,exp(2,exp(2,100))) voor het domein van x

wortel(x)//wortel(x) = 1 voor x >= 0 (want gebied uitgebreid) (aannemend dat eerst iedere x werd gedacht)

wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) = 1 / Abs[x] voor x < 0 (want uitbreiding van het gebied heeft geen effect)

---

[59] See the footnote on Alders At 2012-07-07 17:19

[60] Now in the paper: “Who wants to use substitutions in this manner, would use "variable" in above definition rather than "a variable". Bergstra (in a communication 2012-07-07) suggests to define *x* and *y* as "metavariables" that can also be expressions and then: *y* // *x* ≡ {if *x* has a constant value then *y* / *x* else assume *x* ≠ 0, simplify *y* / *x*, declare the result valid also for the domain extension *x* = 0 }. This suggestion is no different than reading "(a) variable" as "variable". This reading however also requires that domains are assigned to metavariables (“meta-domains” ?, rather than just functions and ranges, or adapt SM for this). Also, it remains important to see that the true message and crux lies with the flexibility of the domain for (super-) variables.”

[61] This seems evasive. Apparently JB accepts y / x for both SM and RM. I asked him for a definition. Why not give it. “I do not want to spend time on pages that I partly made myself.” But such a definition would allow me to adapt for a definition of y // x that RM might accept. It is not really sensible to ask me to know what RM might accept. I only have an idea on what students in SM can understand.

((exp(x,y).exp(z,y))//(x.x) dat kan twee kanten uit: ((exp(x,y-2).exp(z,y)) en (exp(x.z,y))//(x.x)

Zeker. Voor SM zijn zulke vragen niet essentieel. In SM gaat het om tussenstappen die voor latere afleidingen van belang zijn. Ik heb even gekeken, en Mathematica kiest voor het eerste. Maar dat zegt niets over de uitdrukking en alleen iets over Mathematica.

Dus, hoe formuleer jij het domein van y / x ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-08 17:48, JB wrote:

Ik kan deze antwoorden niet begrijpen en dat is beslist iets anders als niet willen begrijpen. Ik maak enkele opmerkingen:

a) als SM staat voor school mathematics dan lijkt me dat het niet zomaar door jou kan worden geclaimd. Als SM staat voor "TC over School Math" dan kan natuurlijk alles en dan is er nauwelijks enige eis aan coherentie. [62]

b) door te schriven x = a + 15 wordt a + 15 allerminst een variabele. [63]

c) De bewering: Waar Alders zou kunnen zeggen "noemer x is geen constante" dan is een equivalente uitspraak "noemer x is een variabele" kan ik niet onderschrijven. Een variable is nou eenmaal iets uit de syntax. [64]

d) Mijn positie als PM is helemaal niet aan de orde hier, het niet maken van een onderscheid tussen variable en metavariable leidt meteen tot onduidelijkheden in SM. [65]

e) Wat is de zin van deze voorbeelden ? Wel: ik kan het echt niet zelf bedenken wat jij wilt dat er uit komt. Bijvoorbeeld: "2x voor het domein van x" is niet een expressie in een mij bekende taal? [66]
(x+x)//1 = 2x voor het domein van x
(2+2)//1 = 4
(10.10.x)//x = 100 voor het domein van x
(exp(2,exp(2,exp(2,100))).x)//x = exp(2,exp(2,exp(2,100))) voor het domein van x

IS dit ook wat mathematca doet? Ik neem toch aan dat je ziet dat er een inconsequentie is met de eerdere voorbeelden, waarom 2.2= 4 en 10.10=100 wel toepassen en deze machten niet uitrekenen? [67]

wortel(x)//wortel(x) = 1 voor x >= 0 (want gebied uitgebreid) (aannemend dat eerst iedere x werd gedacht)
wortel((-x)^3)//wortel((-x)^5) = 1 / Abs[x] voor x < 0 (want uitbreiding van het gebied heeft geen effect)

---

[62] This is unwarranted. I never claimed to be the only judge on what SM is. I can however report to Bergstra what my experience is and what he could try to check with others, when he wrongly imposes RM standards on SM.
[63] If a is a variable then also x is a variable. I had already agreed to "(a) variable" rather than "a variable"
[64] But “noemer x is geen constante” is also syntax. We are speaking about a syntactic test. Why is JB denying that I agree on this ?
[65] This statement is empirically false. SM can do without "metavariables".
[66] JB would fail a highschool test on this.
[67] Mathematica makes a distinction between integer 1 and real number 1.0. The natural number e has an algebraic form E. Thus E^2 remains like that and does not reduce to a decimal expansion. One might call this inconsistent but it is a systematic approach.

((exp(x,y).exp(z,y))//(x.x) dat kan twee kanten uit: ((exp(x,y-2).exp(z,y)) en (exp(x.z,y))//(x.x)
Zeker. Voor SM zijn zulke vragen niet essentieel.
VOOR SM misschien niet maar voor de definitie van -//- wel. Dan moet bekend zijn wat er uit komt. De doelen van SM zijn volstrekt niet aan de orde wanneer het om een definitie van -//- gaat. [68] mvg Jan

At 2012-07-09 09:50, TC wrote:

Beste Jan,

(.... Je was aardig om (....) terwille te zijn.)

Ik constateer dat je niet-cooperatief bent en rare beweringen doet zoals "Als SM staat voor "TC over School Math" dan kan natuurlijk alles en dan is er nauwelijks enige eis aan coherentie". Iemand zonder mijn geduld kan dit alleen maar als beledigend ervaren. Wat is je bedoeling ?

Ik merk:

(a) Bij mij is y de teller en x de noemer in y / x en y // x, en beide kunnen daardoor in SM als variabele worden aangeduid, wat belangrijk is voor de ontwikkeling van het nieuwe concept van het dynamisch quotient. [69] Dit nieuwe concept is geheel in SM ingebed. Mijn indruk is dat je dat in het begin niet gezien hebt, en dat je niet de consequentie ervan wilt dragen dat je dat niet gezien hebt. Je weigert te accepteren dat teller en noemer apart als variabelen gezien kunnen worden. Je accepteert wel dat Alders teller en noemer als variabele gebruikt zonder dat hij expliciet de naam variabele gebruikt. [70]

(b) Je schrijft: "De bewering: Waar Alders zou kunnen zeggen "noemer x is geen constante" dan is een equivalente uitspraak "noemer x is een variabele" kan ik niet onderschrijven. Een variable is nou eenmaal iets uit de syntax." Je gebruikt hier een onderscheid t.a.v. syntax uit PM en onderkent niet dat het in SM iets anders ligt. [71] Je introduceerde bijv. het onderscheid tussen variabele en metavariabele dat in SM niet bestaat en je doet toch alsof het SM is. Zelfs als Alders zou concluderen dat "noemer x is een metavariabele" dan nog lijkt me dat per definitie te gelden, en dat zo'n metavariabele de waarden "constante" of "variabele" kan aannemen.

(c) Je gaat maar moeilijk mee in het onderscheid tussen SM waarin je geen deskundige blijkt en PM. Ik heb je verwezen naar Wu die ook het onderscheid tussen SM en PM maakt en je weigert dat te accepteren. Je maakt onderscheid tussen SMc (Wu ?) en SMtc terwijl dat niet aan de orde is.

(d) Je gaat over tot woordspelletjes zoals "x = a + 15 wordt a + 15 allerminst een variabele". Waar het om gaat is dat x een variabele is. Het is inderdaad ongebruikelijk om te zeggen dat a + 15 een variabele is, maar daar gaat het hier niet om, dat zoiets ongebruikelijk is. Het gaat erom dat de noemer een variabele is, daarop is die toets in het dynamic quotient. Dat heb je in het begin blijkbaar niet gezien. Dat is nu uitgelegd, en hou erover op, zou ik zeggen. (Ik heb ook uitgelegd dat SM geen onderscheid maakt tussen primitieve variabelen en variabelen

---

[68] This is unwarranted. The dynamic quotient has been defined for SM. It is a false claim of Bergstra to require that it first must be fully clear in RM what the implications are.
[69] The emphasis is on “kunnen” (can). The paper is clearer, that y and x are chosen as a variable or as a constant. This avoids the “meta-variable” issue of allowing for such a choice. Of course, when x has been choice as a variable, it appears that the denominator can be a variable indeed.
[70] See the footnote on Alders At 2012-07-07 17:19
[71] I agree on the test on the syntax, whether something is a variable or a constant. The point here is that if the expresssion is x – x then a purely syntactic test might only look at open or closed expressions and conclude that this would not be a constant. Thus a semantic step may be introduced, x – x = 0. It appears after all that the denominator is a constant,which is a syntactic test.

voor expressies. De opmerking hierboven gaat daar weer over. Je vervalt in herhalingen waarbij uitleg niet registreert.)

(e) Je ontkent eerst dat x - x of 2 - 2 tot nul mag worden gereduceerd, maar bij Alders mag het plotseling wel.

(f) Je presenteert mij opstellingen voor y //' x en y //'' x waarin je de vereenvoudiging niet opneemt en beweert dat wel te begrijpen terwijl die vereenvoudiging noodzakelijk is om valkuilen als x - x te vermijden.

(f) Je gaat door over "vereenvoudiging" terwijl dit verder niet aan de orde is. Het is gedefinieerd voor een bepaalde context. Eindexamen havo A zal anders zijn dan vwo B. Klaar. Waarom daarover doorgaan ? Je vraagt allerlei voorbeelden. Om je tegemoet te komen geef ik enkele antwoorden. We zijn echter niet bezig met het achterhalen wat SM is maar het gaat om de introductie van y // x in SM. Je stelt echter: "VOOR SM misschien niet maar voor de definitie van -//- wel. Dan moet bekend zijn wat er uit komt. De doelen van SM zijn volstrekt niet aan de orde wanneer het om een definitie van -//- gaat." Dat is raar. Of je zegt wat ik zeg, dat SM verder als gegeven wordt beschouwd, en je hebt verder geen voorbeelden nodig, of je zegt wat anders, maar dan ga je niet in op de vraag.

De relevante voorbeelden zijn m.i. x // x = 1 en x^2 / x = x. Hiervoor heb ik op pag 7 van de PDF jouw suggestie tot een y //' x aangepast, en met de gewenste Simplify erin, om delen door x - x te vermijden.

De crux ligt m.i. bij je opmerking dat S geen verzameling was zodanig dat je niet begreep wat het domein van y //' x zou zijn. Mijn antwoord is dat je dan beter eerst kunt aangeven wat voor jou het domein van y / x is.

Wat is de situatie ? Mijn boek dient de verbetering van het onderwijs in wiskunde voor SM. Ik ben voorstander van verdere aanscherping in SM zoals t.a.v. =, == en ===, en inderdaad ook primitieve variabelen en andere vormen. Maar ik ga de introductie van het dynamisch quotient daar niet van afhankelijk maken, want dat is niet nodig, en zal ook averechts werken, dat collegae zouden gaan stellen dat het zo te moeilijk wordt. Vervolgens, COTP is work in progress en ik voeg er Reading Notes aan toe waar blijkbaar misverstanden kunnen rijzen. Ik wil graag in het midden laten wat de oorzaak van zulke misverstanden is. Voor mij was het evident dat y / x gelezen moet worden als teller / noemer. Maar ik gebruik SM en jij leest wat anders, dat een noemer niet meer een variabele zou zijn wanneer daarin een expressie wordt gesubstitueerd. Ik heb nu de indruk dat je aan PM vasthoudt omdat je niet wilt accepteren dat je die andere invalshoek niet gezien hebt. Je komt maar terug op SM terwijl het logisch is door te gaan met jouw domein voor y / x.

Heeft een leraar je nu gecorrigeerd en kunnen we doorgaan of wil de hoogleraar vasthouden aan de ivoren toren ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-09 12:24, JB wrote:

Op alles in dit leven zijn verschillende perspectieven mogelijk. Het idee dat ik (...) ter wille zou zijn was niet in mij opgekomen, maar misschien is dat een praktische kijk op deze kwestie. In elk geval doe ik mijn best te begrijpen wat je schrijft en als dat naar jouw maatstaven niet snel genoeg lukt verklaar je mij voor dom of eigenwijs. [72] Dat is opmerkelijk. Nu kan ik daar goed tegen, dat is niet mijn probleem.

[72] These are not exactly my words.

Een vraag die je hieronder stelt hieronder kan ik wel beantwoorden: - in "gewone wiskunde (ook op school)" is het domein van y/x (als functie van y en x) de verzameling van paren Reals x Reals/{0} (en de range van y/x is Reals). In de theorie van de meadows is het domein van y/x de verzameling van paren Reals x Reals. Beide domeinen zijn volgens mij voor -//- niet aan de orde, -//- werkt op iets anders. Maar wat? Daar probeer ik al dagen achter te komen en dat lukt mij niet. En omdat je met die voorbeelden niet verder wilt heb ik ook geen enkel ander hulpmiddel om te begrijpen wat je wilt bereiken. is het resultaat van P//Q afhankelijk van wie er voor de klas staat? Krijgt een PM er wat anders uit dan een SM, krijgt elke SM er het zelfde uit? mvg, Jan

At 2012-07-09 13:01, TC wrote:

Dag Jan,

(a) Misschien ben je geholpen met een pagina van een schoolboek waarin de afgeleide van teller / noemer wordt uitgelegd ? Beide worden ge-introduceerd als functies van x, want daar gaat het natuurlijk om. Doet Alders ook, maar die gebruikt geen korte uitleg. In deze uitleg in Getal en Ruimte wordt wel een "kortweg" gebruikt, waarin t en n gebruikt worden. Het is dus niet ongebruikelijk in SM om teller en noemer met symbolen weer te geven. In dit geval ligt nadruk op functies maar voor het dynamisch quotient volstaan variabelen.

[Appendix: copy of a textbook page, now on the derivative]

(b)

> At 12:24 2012-07-09, you wrote:
> Op alles in dit leven zijn verschillende perspectieven mogelijk. Het idee dat ik (...) ter wille zou zijn was niet in mij opgekomen, maar misschien is dat een praktische kijk op deze kwestie.

Zo was de introductie toch ? Maar wanneer je een zelfstandige interesse in deze gedachtenwisseling hebt, dan des te beter.

> In elk geval doe ik mijn best te begrijpen wat je schrijft en als dat naar jouw maatstaven niet snel genoeg lukt verklaar je mij voor dom of eigenwijs. Dat is opmerkelijk. Nu kan ik daar goed tegen, dat is niet mijn probleem.

Ik verklaar je niet dom of eigenwijs.

> Een vraag die je hieronder stelt hieronder kan ik wel beantwoorden: - in "gewone wiskunde (ook op school)" is het domein van y/x (als functie van y en x) de verzameling van paren Reals x Reals/{0} (en de range van y/x is Reals). In de theorie van de meadows is het domein van y/x de verzameling van paren Reals x Reals.

Met verwijzing naar PDF pag 7

(a) Voor S1 met x en y alleen getalswaarden. Dan is er geen verschil tussen / en //

(b) Voor S2 zijn er echter symbolen x en y. Wellicht is daarop iets te definieren maar onduidelijk is wat daarvan de betekenis is. Pure formule-algebra zonder verwijzing naar getallen.

(c) S3 primitieve variabelen met domeinen, hier is x // x = 1, dus domein Reals x Reals, range Reals (maar 1). Hier is y // x = y / x omdat y als symbool verschilt van x en niet verder te vereenvoudigen is.

> Beide domeinen zijn volgens mij voor -//- niet aan de orde, -//- werkt op iets anders. Maar wat? Daar probeer ik al dagen achter te komen en dat lukt mij niet. En omdat je

> met die voorbeelden niet verder wilt heb ik ook geen enkel ander hulpmiddel om te begrijpen wat je wilt bereiken. is het resultaat van P//Q afhankelijk van wie er voor de klas staat? Krijgt een PM er wat anders uit dan een SM, krijgt elke SM er het zelfde uit? mvg, Jan

Je voorbeelden blijken niet de goede weg.

Wel is de vraag t.a.v. P // Q relevant. Dan gebruiken we inderdaad expressies.

(d) S5 lijkt me wederom alleen pure formule-algebra zonder verwijzing naar Reals.

(e) S6 heeft dan domeinen. Dan is de vraag hoe je P / Q definieert. Wellicht zoals in het voorbeeld van Alders, PDF pag 4. Maar hoe bepaal je de limietwaarde voor x = 2 ? Ik stel me zo voor dat die limietwaarde wordt gevonden door eerst symbolisch x - 2 uit te delen, en dan de waarde van x in te vullen waarvoor x - 2 = 0. Het huzarenstukje gaat iets sneller mbv P // Q.

Hoe zou jij dan het symbolisch uitdelen met x - 2 formuleren, gegeven het verschijnsel dat mogelijkerwijs x = 2 ?

Met beste groet,

Thomas

At 2012-07-09 16:30, JB wrote:

(a) Dat schoolboek is duidelijk en leidt bij mij niet tot vragen. Natuurlijk kun je een teller of een noemer met symbolen weergeven, maar daarmee worden het geen variabelen. Ik echt weinig anders van maken. Bij het dynamisch quotient volstaan variabelen wat mij betreft niet. (b) de introductie liep bij mijn weten liep via (...). (c) je spreekt over pure formule algebra. Dat is exact het onderwerp van de lichaamsuitbreidingen. Breid een lichaam K uit tot K(X) door toevoeging van een transcendent element X en dan krijg je het lichaam der rationale functies over X. Het onderwerp bestaat zodra we expressies met variablen hebben b.v. alleen de variabele X. Dat zou betekenen dat -//- een betekenis heeft in Reals[X], maar ik zie niet hoe. (d) de voorbeelden zijn voor mij wel de goede weg, om -//- te begrijpen want langs die lijn kan ik proberen te begrijpen wat je bedoelt. mvg, Jan

At 2012-12-06 14:52, TC wrote:

Beste Jan,

In juli kreeg mijn computer last van een virus, en het was niet internet-etiquette-juist om op je laatste email te reageren. Ik heb eerst nog geprobeerd het zelf te herstellen maar moest uiteindelijk naar de winkel. Toen e.e.a. hersteld was lagen er zaken met hogere prioriteit, dus onze gedachtenwisseling bleef liggen. Ook op dit moment moeten enkele andere zaken eerst, maar het lijkt een goed moment, aan het jaarseinde, om uit te leggen waarom de reactie wegviel.

Omdat het nu een jaarseinde is met dit feestseizoen maak ik ook maar melding van mijn nieuwe boek, wellicht vind je dit interessant: "The simple mathematics of Jesus".

http://thomascool.eu/Papers/SMOJ/Index.html

Het ligt voor aan Nieuw Archief voor Wiskunde voor een bespreking. [73] Ik begon eraan met de bedoeling om het voor het onderwijs te kunnen gebruiken, maar het taalgebruik werd allengs

[73] Rejected there for a book review.

te ingewikkeld, en hopelijk kom ik nog aan zo'n nog weer eenvoudiger versie toe. Maar jouw studenten zouden er al plezier aan kunnen hebben.

Met beste groet,

Thomas

At 2012-12-06 15:58, JB wrote:

Beste Thomas, In elk geval plezierig "uiteinde 2012" gewenst. Die virussen daar moeten we binnen de informatica van leven. Als alles goed werkte hadden we niks te doen, maar wie het treft zit er maar mee. mvg Jan

At 2013-11-05 19:19, TC wrote:

To different readers, also JB:

Geachte wiskundige of wiskundeleraar,

Komende zaterdag 9 november heeft de NVvW haar studiedag:
http://www.nvvw.nl/page.php?id=9496&rid=597

Ik verzorg daar workshop D5 over de algebraische aanpak van de afgeleide.

Hier leg ik uit dat het een wereldontdekking is:

http://thomascool.eu/Thomas/Nederlands/Wetenschap/Artikelen/2012-05-25-EenWereldontdekking.html

Dit is de eerste keer dat ik hierover een presentatie verzorg. De ontdekking staat in "A Logic of Exceptions" (2007) en is uitgewerkt in "Conquest of the Plane" (2011). Met collegae praat je er niet over, want met hen bespreek je het bestaande programma, en het zou verwarring wekken alsof je in de klas iets anders doet. Dus ik vind het toch wel bijzonder om na zes jaar hierover een uiteenzetting te houden.

De sheets van de presentatie staan hier:
http://thomascool.eu/Papers/COTP/2013-11-05-ColignatusStudiedagNVvW.pdf

De samenvatting staat hieronder.

De presentatie zal tweemaal gegeven worden, van 12:00 -13:00 uur en van 14:00 -15:00.

IJs en weder dienende.

Met vriendelijke groet,

Thomas Cool / Thomas Colignatus
Econometrist (Groningen 1982) en leraar wiskunde (Leiden 2008)
Scheveningen

================================
D5. De algebraïsche aanpak van de afgeleide

Via algebra is een andere didactiek van de afgeleide mogelijk. In de didactiek bestaat er standaard al het "procept", waarbij een wiskundig concept ook een proces kan voorstellen. Wanneer we dit toepassen op de deling, dan ontstaat het onderscheid tussen de gewone deling als een statisch concept naast een nieuwe dynamische deling opgevat als een proces

met algebraïsche manipulatie. Een gevolg hiervan is dat nieuwe algebraïsche aanpak van de afgeleide er direct komt uitrollen. In deze aanpak is het limietbegrip niet meer nodig om de afgeleide te construeren. Cauchy en Weierstrasz blijven natuurlijk relevant voor de universiteit maar zijn niet direct nodig voor het middelbaar onderwijs. De algebraïsche aanpak is direct inzichtelijk voor de leerlingen. Hierdoor is het ook gemakkelijker om aan te haken bij vakken als natuurkunde en economie. Zie ook de PDF op:
http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html

At 2013-11-10 14:13, TC wrote:

To different readers, also JB:

Geachte wiskundige of wiskundeleraar,

Ik geef u gaarne een terugmelding over de sessie over de algebraische aanpak van de afgeleide. Mocht u aan een universiteit werken is mijn suggestie dit email door te sturen aan een colloquium-commissie. Ik herhaal een eerder verzoek aan Gerard Jeurnink & Nelleke den Braber tot een presentatie bij Platform Wiskunde NOCW (maar dan breder over COTP). Ik zou hier graag enig tempo willen maken gezien de eerdere laster en leugen in Euclides die onnodig vertraging oplevert.

De sessie was tweemaal een goed succes. Deelnemers waren natuurlijk niet onmiddellijk overtuigd maar men accepteerde dat je een "dynamische deling" zo kunt definieren, en men vond de uitleg over de manipulatie van het domein didactisch verhelderend.

Grappig was dat de eliminatie van de limiet en het differentiaalquotient niet als probleem werd ervaren. In de praktijk wordt er immers nog slechts vaag over gepraat.

Bij de overgang van Wiskunde B1,2 naar B zijn limieten eigenlijk al uit het programma verdwenen. Zie www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2002-03-1-070.pdf en http://www.slo.nl/organisatie/inDeMedia/2008/S45C-108070809591.pdf , Jenneke Krüger, Euclides 83-8, p375: "Hoewel limieten weer in een subdomein opgenomen zijn is het niet de bedoeling hier een heel uitgebreid onderdeel van te maken. De limiet wordt beschouwd als een noodzakelijk concept bij de introductie van afgeleiden en bij bestudering van het asymptotisch gedrag van functies."

De analyse dat limieten ook inhoudelijk verwijderd kunnen worden komt voor velen derhalve als mosterd na de maaltijd.

Het antwoord hierop is:

(a) limieten zijn belangrijk, en zijn verwijderd met verkeerde reden, ook al is het een juiste observatie dat leerlingen terecht moeite hebben met limieten in het differentiaalquotient. Te adviseren is limieten terug te brengen m.n. voor asymptoten. Eindexamen B doen in wiskunde zonder begrip van limieten is bizar.

(b) Het gebruik van de dynamische deling herstelt op inzichtelijke wijze de verloren exactheid (als die er was) voor verhoudingen en afgeleide.

Ik heb dit punt toegevoegd aan de sheets over de sessie, met behoud van de oorspronkelijke link:

http://thomascool.eu/Papers/COTP/2013-11-05-ColignatusStudiedagNVvW.pdf

Met vriendelijke groet,

Thomas Cool / Thomas Colignatus