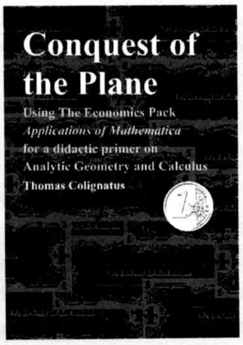
Boekbespreking

CONQUEST OF THE PLANE



[Jeroen Spandaw]

Ondertitel: Using The Economics Pack Applications of Mathematica for a didactic primer on Analytic Geometry and Calculus
Auteur: Thomas Colignatus
Uitgever: T. Cool (Consultancy & Econometrics), Scheveningen (2011)
ISBN 978 90 8047746 9
Prijs: € 24,95 (238 pagina's)

Een blik op de website « *www.dataweb.nl/~cool/* » van Thomas Colignatus (werkelijke naam Thomas Cool) laat zien dat de auteur een kleurrijk persoon is. Deze econometrist en kandidaat voor het Europees presidentschap denkt bijvoorbeeld te hebben aangetoond dat de beroemde stelling van Kurt Gödel over de existentie van onbeslisbare (dus noch te bewijzen, noch te weerleggen) proposities simpelweg onzin is! In allerlei publicaties geeft hij zijn ongezouten mening over politiek, economie, wiskunde, wiskundigen, logica en wiskundeonderwijs. Van wiskundigen laat hij in zijn stuk *Waarschuwing voor wiskundigen* weinig heel. Zij zijn 'opgeleid tot abstracte theorie', terwijl 'voor onderwijs een empirische instelling nodig is, welke wiskundigen ontberen'. Het gevolg volgens Colignatus: slecht wiskundeonderwijs, woekerpolissen en economische crisis.

Ik ben het met Colignatus eens dat wiskunde een prachtig en belangrijk vak is en dat het ons op school onvoldoende lukt om dat duidelijk te maken. Ik denk net als hij dat het voor econometristen en andere toepassers van wiskunde erg belangrijk is om te leren over de beperkte toepasbaarheid van wiskundige modellen. Verder is voor mij, net als voor Colignatus, *Bildung* een belangrijk onderwijsideaal: leren zo veel mogelijk zelf te oordelen en zo onafhankelijk mogelijk te worden van autoriteiten die vertellen wat goed is en wat niet.
Natuurlijk lukt dat vaak slechts in beperkte mate vanwege ontbrekende specialistische kennis. Maar gelukkig kun je juist in de wiskunde een heel eind komen zonder veel specialistische kennis. Een Delftse collega antwoordt op de vraag van studenten of een bepaalde algebraïsche manipulatie 'mag' met: 'het mag als het correct is.' Niet de autoriteit, niet de professor, niet de leraar, niet het antwoordenboekje, maar de logica beslist. Dit is natuurlijk een idealisatie van een complexere werkelijkheid. Ik kan bijvoorbeeld niet overzien of Wiles' bewijs van de Stelling van Fermat helemaal correct is, dus ik vertrouw grotendeels op het oordeel van autoriteiten.

Over Colignatus' wiskunde en didactiek daarentegen durf ik zelf wel een oordeel te vellen. Dat oordeel is negatief.
Colignatus snijdt interessante punten aan, maar zijn wiskundige en didactische analyses zijn zwak. In de volgende paragrafen beschrijf ik een paar belangrijke thema's uit het boek *Conquest of the Plane* en mijn bezwaren. U kunt dan zelf oordelen.
Ik heb dagen van mijn leven verspild aan het lezen van dat boek en het schrijven van deze recensie. Ik heb veertien bladzijden aantekeningen verzameld over het onbegrijpelijke proza, de onzin, de regelrechte fouten, de misverstanden, de half begrepen en slecht gepresenteerde wiskunde. Ik zal u niet vermoeien met een uitputtende opsomming van alle onzin, maar ik hoop wel dat na deze recensie *niemand* ooit meer tijd hoeft te besteden aan de pseudo-wiskundige werken van Colignatus.
Daarom beperk ik deze recensie nu niet tot een kort en krachtig 'Dit boek is onzin! Verdoe hier uw tijd niet aan!', maar zal ik een aantal voorbeelden geven uit de verwarde wereld van Colignatus. Ik heb de ijdele hoop dat dit de 'Colignatussen' van Nederland er in de toekomst van zal weerhouden nog vaker tijdschriften en recensenten lastig te vallen met hun flauwekul.

Het boek *Conquest of the Plane* gaat over vlakke meetkunde en calculus. De brug tussen de twee thema's wordt gevormd door de goniometrische functies. Colignatus zegt nooit in welk vlak hij werkt, maar ik vermoed dat het $\mathbf{R}^2$ is. Hier is een aantal vernieuwingen van Colignatus:

- een nieuwe notatie voor 2π, namelijk Θ;
- een nieuwe eenheid voor hoeken, genaamd UMA;
- nieuwe goniometrische functies, genaamd Xuc, Yuc, Xur en Yur;
- een nieuwe definitie van vectoren in $\mathbf{R}^2$;
- gebruik van *Mathematica*, in het bijzonder een door Colignatus geschreven pakket.

De UMA (unit measure around) is gedefinieerd door 1 UMA = 2π radialen = 360° De functies Xur en Yur zijn de bijbehorende herschaalde versies van de cosinus en sinus. Bij eerste lezing is mij ontgaan hoe de functies Xuc en Yuc zijn gedefinieerd en helaas is er geen index om het snel op te zoeken (ik ga nu niet nóg meer tijd verspillen). Colignatus beweert dat door dergelijke vernieuwingen studenten eindelijk de cosinus en sinus gaan begrijpen. Ik geloof er helemaal niets van. Bij cosinus en sinus zal de stap van verhoudingen in een driehoek naar functies op $\mathbf{R}$ altijd een didactische uitdaging blijven; de factor 2π kom je vroeg of laat tegen met welke eenheid je ook werkt, en je bewijst leerlingen geen dienst met nieuwe notaties die verder helemaal niemand gebruikt.

Θ, UMA, Xuc, Yuc, Xur en Yur zijn wellicht nog een kwestie van smaak, maar bij de vectoren gaat Colignatus echt de mist in. Hij definieert een vector als een geordend paar (P, Q) met P en Q in $\mathbf{R}^2$. Colignatus zou Colignatus niet zijn als hij hiervoor geen eigen notatie voor had: $\{P, Q\}$. Hij lijkt zich echter niet te realiseren dat een vector volgens deze definitie een element van $\mathbf{R}^2{\times}\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^4$ is, want de som

van twee Colignatus-vectoren uit $\mathbf{R}^4$ blijkt twee bladzijden later (soms?) in $\mathbf{R}^2$ te liggen! Ik kan de juistheid hiervan niet beoordelen, want Colignatus definieert die optelling nergens.

Ben ik nou zo'n wiskundige betweter, zoals beschreven in Colignatus' polemiek *Waarschuwing voor wiskundigen*? Ben ik, misvormd door 'abstracte theorie', niet in staat Colignatus' werk naar waarde (wiskundig of didactisch) te schatten? Of voldoet Colignatus niet aan zijn eigen motto 'sloppiness is never good'? Kent u iemand die door zijn bijdragen het wiskundige licht gaat zien? Ik niet. De Mathematica-voorbeelden in het boek, zo-als tabellen waarin hoeken ($k \;\; 2\pi$) in stapjes met $\Delta k = 0{,}1$ worden omgerekend in andere eenheden (zoals de UMA), betreffen trivialiteiten verpakt in afschrikwekkende syntax. Opgaven komen in het boek trouwens niet voor, want, zo lezen we, die kunnen we overal op het internet vinden en na lezing van dit boek met zijn software oplossen.

In het meetkundedeel gebruikt Colignatus de identificatie $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ en die is inderdaad reuze handig bij problemen in $\mathbf{R}^2$ die gaan over rotatie, translatie en strekking. Een mooi voorbeeld (niet in Colignatus' boek) is het eenvoudig te googlen schatgravers-probleem. Met complexe getallen los je dit in één regel op. Hierbij is het natuurlijk niet noodzakelijk om over die beruchte √(-1) te spreken: je kunt direct de vermenigvuldiging op $\mathbf{R}^2$ definiëren door $(a_1, b_1) \;\; (a_2, b_2) := (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$. Je moet dan wel zaken als associativiteit, $z(wv) = (zw)v$, en distributiviteit, $z(w + v) = zw + zv$, checken en dat doet Colignatus niet. Bovendien doen Colignatus' onhandige notaties ernstig afbreuk aan de schoonheid van deze wiskunde. Het gebruik van Mathematica maakt het nog erger: om dit eenvoudige idee te begrijpen zijn blijkbaar commando's als 'VectorProductGO', 'VectorProductPlot' en 'PointToTFMatrix' nodig.
Het is waarlijk een mirakel dat ik als vwo-5-leerling complexe getallen heb kunnen begrijpen zonder deze didactische 'verbeteringen'!
Een laatste opmerking over Colignatus' meetkunde: de 'uitleg' van matrixrekening wordt beperkt tot het poneren van formules zonder enige rechtvaardiging. Nergens wordt bijvoorbeeld nagerekend dat het matrixproduct (niet het *inproduct*, zoals Colignatus schrijft) van een matrix met zijn inverse (als die bestaat) de eenheidsmatrix is. We moeten blijkbaar alles op gezag van de auteur aannemen. Dat is in strijd met ons beider 'Bildungsideaal' Over het oplossen van $Ax = b$ als $\det(A) = 0$ wordt niets gezegd.

De belangrijkste belofte in het deel over calculus is analyse zonder limieten en zonder infinitesimalen. Deze belofte wordt niet waargemaakt. Laten we eerst even kijken naar de onder wiskundigen gebruikelijke manier om de afgeleide van een functie f in een punt a te definiëren:

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Hierbij zeggen we dat een functie g convergeert naar een getal L voor $h \to 0$, notatie $\lim_{h \to 0} g(h) = L$, als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|g(h) - L| < \varepsilon$ voor alle h die voldoen aan $0 < |h| < \delta$.
Je gaat eenvoudig na dat er hoogstens één getal L voldoet. In de afgeleide passen we deze definitie van Weierstrass toe op het differentiequotiënt $g(h) := \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Dit differentiequotiënt laten we ongedefinieerd in $h = 0$. Omdat Weierstrass' geraffineerde definitie nergens $g(0)$ gebruikt, is dat geen enkel probleem. Colignatus' opmerking 'Weierstrass's limit is undefined precisely at the relevant point of interest' (pag. 223), suggereert dat hij dat niet heeft begrepen. Die uitspraak is sowieso onzin, want $\lim_{h \to 0} g(h)$ hangt niet van h af, dus wat zou 'undefined at the point of interest' in 's hemelsnaam moeten betekenen voor deze limiet?

In de eeuwen tussen Newton en Weierstrass werd met zogenoemde infinitesimale getallen gewerkt: je nam een 'oneindig klein' getal h, dat niettemin ongelijk was aan 0, en je keek naar het bijbehorende differentiequotiënt $(\Delta f) / h$. Natuurkundigen doen het nog steeds graag zo.
Om bijvoorbeeld de afgeleide van $f(x) = x^3$ uit te rekenen nemen we een 'infinitesimaal kleine' h en berekenen:
$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$
Er geldt dus:
$\Delta f = (x + h)^3 - x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3$ en
$(\Delta f) / h = 3x^2 + 3hx + h^2$
Omdat h 'oneindig klein' is, zijn de laatste twee termen te verwaarlozen ten opzichte van $3x^2$. Daarom is de afgeleide $3x^2$. Een beetje dubieuze afleiding (de laatste stap werkt bijvoorbeeld niet voor $x = 0$), maar ik kan er toch wel warm voor lopen. Mijn wiskundig geweten heeft er ook weinig problemen mee, want ik weet dat het eenvoudig hard te maken is met een limiet, ik weet dat er sinds de vorige eeuw zelfs een legitieme theorie van infinitesimalen bestaat (zie bijvoorbeeld het mooie spotgoedkope boekje *Infinitesimal Calculus* van Henle en Kleinberg), en ik weet bovendien hoe handig het kan zijn om informeel met infinitesimalen te werken zoals natuur-kundigen dat doen.

Weierstrass' definitie van limiet en afgeleide gebruikt uitsluitend gewone reële getallen voorkomen, dus geen 'infinitesimale' getallen. Dat is de essentie van Weierstrass' beroemde ε-δ-definitie van limieten: een exacte definitie die alleen gebruik maakt van het bekend verondersteldeDe begrip 'reëel getal'. In tegenstelling tot wat Colignatus beweert, lost Weierstrass' definitie dus *wel* de problemen van de oudere aanpak met

infinitesimalen op. De theorie is, anders dan Colignatus beweert, *niet* 'overly complex and essentially inconsistent'

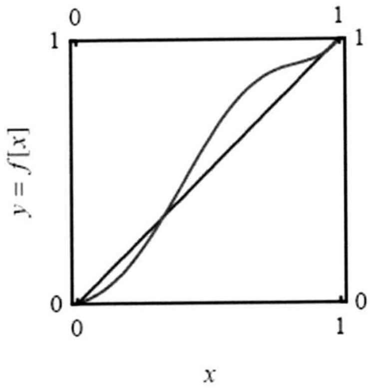
Colignatus heeft de volgende 'ontdekking' gedaan: als je het differentiequotiënt $g := (\Delta f) / h$ uitrekent voor een polynoom f, dan vind je een polynoom in x en h. Dit hebben we hierboven gezien voor $f(x) = x^3$, waarvoor $g(x, h) = 3x^2 + 3hx + h^2$. Verder geldt dat je de limiet van g voor $h \to 0$ eenvoudig kunt bepalen door $h = 0$ in te vullen in g. Voor een wiskundige is dat niet vanzelfsprekend: je moet bewijzen dat $\lim_{h \to 0} g(h) = g(0)$. Colignatus wijdt daar geen woord aan. Zo *lijkt* het alsof je geen limiet nodig hebt. De limiet zit echter verborgen in de stilzwijgende, plausibele en correcte veronderstelling dat polynomen continu zijn.

Dit is het didactische tovermiddel van Colignatus! Voor alle duidelijkheid: ik ben het met Colignatus eens dat je leerlingen niet hoeft lastig te vallen met een formele ε-δ-definitie.
Maar Colignatus schijnt echt te denken dat hij een *wiskundige* ontdekking heeft gedaan, en daar moeten we hem helaas teleurstellen. Natuurlijk kun je een limietloze, puur algebraïsche theorie maken van afgeleiden van eenvoudige functies zoals polynomen. Zulke theorieën zijn dan ook al lang ontwikkeld (zie bijvoorbeeld het lemma 'Derivation' op WikipediA). Je gaat daarbij axiomatisch te werk, waarbij je bijvoorbeeld de productregel als axioma poneert. Maar dat is niet wat Colignatus doet. Laten we eens kijken wat er van zijn ideeën overblijft als we $\sin(x)$ differentiëren in het punt $x = 0$. We moeten dan kijken naar het differentiequotiënt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h} := g(h)$$

voor $h \neq 0$. Anders dan in het polynomiale geval, komt er geen polynoom in h uit. Dus we moeten nu echt een limiet uitrekenen; we kunnen niet simpelweg $h = 0$ invullen. Toegegeven, op een zeker didactisch niveau kan dat wel: plot de functie g en je 'ziet' dat de 'correcte' waarde voor $h = 0$ (de waarde die de functie g continu voortzet in $h = 0$) gelijk moet zijn aan 1. Je 'ziet' de limiet in de grafiek, maar aan de limiet zelf ontkom je niet. Hoe doet Colignatus het dan? Wel, hij gebruikt de insluiting $\cos(h) \leq g(h) \leq 1$ om te bewijzen dat $g(h) \to 1$ als $h \to 0$. Hij berekent dus gewoon de limiet (op de gebruikelijke manier). Colignatus' belofte van limietloze analyse wordt dus niet waargemaakt.

Een laatste voorbeeld over 'wiskunde' volgens *Conquest of the Plane*, namelijk Colignatus' poging om met de fixpunt-stelling van Brouwer het getal e te definiëren. Dit hele stuk is Colignatus in optima forma met raadselachtige zinnen als 'instead of addition we have the addition of derivatives' en 'instead of the diagonal we have the "identity function" - a function is always identical to itself'.



figuur 1 Bron: Conquest of the Plane, pag. 167

Een opeenstapeling van fouten toont het wanbegrip van de auteur. Ik noem er een paar. Colignatus formuleert Brouwers stelling niet, maar zijn plaatje (***zie figuur 1***) suggereert de stelling dat iedere continue functie van [0, 1] naar [0, 1] een fixpunt heeft. Dit is overigens een eenvoudig gevolg van de tussenwaarde-stelling. Vervolgens wil Colignatus met deze stelling de existentie van $f(x) = e^x$ als oplossing van de differentiaalvergelijking $f' = f$ aantonen. Hij wil daarvoor Brouwer toepassen op een functieruimte, terwijl die stelling helemaal niet over functieruimten gaat. We passen dus een niet van toepassing zijnde, niet geformuleerde stelling toe op een niet genoemde operator op een niet gespecificeerde functieruimte! Ook is volkomen onduidelijk waarom er een oplossing van de vorm $f(x) = a^x$ met $a > 0$ zou moeten zijn, noch waarom deze uniek is.
Opnieuw heb ik het over de krakkemikkige wiskunde van Colignatus. Laten we naar de didactiek kijken. Je kunt eenvoudig aannemelijk maken dat de afgeleide van $f(x) = a^x$ evenredig is met de functie zelf waarbij de evenredigheidsconstante de afgeleide van f in $x = 0$ is, en dat er een getal $e \approx 2{,}7$ bestaat waarvoor die evenredigheids-constante gelijk is aan 1. Daar hebben we geen fixpunt-stelling van Brouwer voor nodig.

Ik zou nog vele pagina's kunnen vullen met wiskundige missers, maar ik hoop dat dit afdoende is. We zien keer op keer hetzelfde beeld: Colignatus heeft gevoel voor didactisch interessante punten, maar wiskundig schiet hij te kort. De radiaal is interessant: het is een 'wiskundige eenheid'. Je kunt argumenteren dat 1 radiaal identiek met het getal 1 is en dat hoekmaten dus eenheidloos zijn (namelijk het quotiënt van een cirkelboog en een straal). Toch is het soms handig om verschil te maken tussen 1 radiaal en het getal 1. Colignatus begrijpt dat wat een stelling is in de ene opbouw van een theorie (vlakke meetkunde bijvoorbeeld), een definitie kan zijn in een andere aanpak (voorbeeld: Pythagoras en de afstand tussen twee punten in $\mathbf{R}^2$). Dit soort 'blikwisseling' is belangrijk in de wiskunde. Verder heeft Colignatus opgemerkt dat in een differentiequotiënt $h \neq 0$ geldt (nauwkeuriger: mag worden aangenomen), terwijl je vervolgens vaak $h = 0$ neemt. Hij begrijpt echter niet dat Weierstrass' definitie van de limiet deze paradox keurig netjes oplost.
Hij heeft goede ideeën over het gebruik van complexe getallen in het reële vlak. In het begin schreef ik ook al dat ik ook sommige opinies over onderwijsdoelen en wiskundige modellen deel. Maar daarmee zijn de positieve opmerkingen wel uitgeput.
Niemand wordt wijzer van dit boek; daarvoor is de wiskunde te slecht. Gebruikt u uw tijd liever om goede boeken te lezen. Voor een schijntje koopt u de *Elementen* van Euclides, voor wat meer geld het slordige maar leesbare boek *The four pillars of geometry* van Stillwell over verschillende benaderingen van de vlakke meetkunde, of pak het meteen grondig aan en lees *Euclid and beyond* van Hartshorne. Voor een correcte en goed leesbare opbouw van de analyse raad ik u het schitterende boek *Calculus* van Spivak aan. En *ter leering ende vermaeck* leest u de hilarische boeken van Underwood Dudley over pseudo-wiskunde. Wie dergelijke boeken leest, heeft geen enkele behoefte aan Colignatus' geschrijf.

Over de recensent
Jeroen Spandaw is universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft.
E-mailadres: *j.g.spandaw@tudelft.nl*