NVvW Studiedag 9 november 2013

https://www.nvvw.nl/15884/subthema-d-diversen

# D5. De algebraïsche aanpak van de afgeleide

*Via algebra is een andere didactiek van de afgeleide mogelijk. Nadruk op didactiek. Vergezicht op theorie.*

Thomas Cool / Thomas Colignatus
Econometrist (Groningen 1982) en leraar wiskunde (Leiden 2008)
http://thomascool.eu

- 15 minuten: inleiding
- 5 minuten: vragen ter verduidelijking
- 15 minuten: voortzetting presentatie
- 20 minuten: discussie
- 2 minuten: afronding

## Samenvatting uit het programmaboekje

Via algebra is een andere didactiek van de afgeleide mogelijk. In de didactiek bestaat er standaard al het "procept", waarbij een wiskundig concept ook een proces kan voorstellen. Wanneer we dit toepassen op de deling, dan ontstaat het onderscheid tussen de gewone deling als een statisch concept naast een nieuwe dynamische deling opgevat als een proces met algebraïsche manipulatie. Een gevolg hiervan is dat nieuwe algebraïsche aanpak van de afgeleide er direct komt uitrollen. In deze aanpak is het limietbegrip niet meer nodig om de afgeleide te construeren. Cauchy en  Weierstrasz blijven natuurlijk relevant voor de universiteit maar zijn niet direct nodig voor het middelbaar onderwijs. De algebraïsche aanpak is direct inzichtelijk voor de leerlingen. Hierdoor is het ook gemakkelijker om aan te haken bij vakken als natuurkunde en economie. Zie ook de PDF op: http://thomascool.eu/Papers/COTP/Index.html

## Inhoudsopgave van de inleiding

(1) *procept* (process – concept), Gray & Tall 1994

(2) variabele: niet alleen getal maar ook naam

(3) standaard-deling met limietbegrip

(4) statische versus dynamische deling

(5) de afgeleide komt er gewoon uitrollen

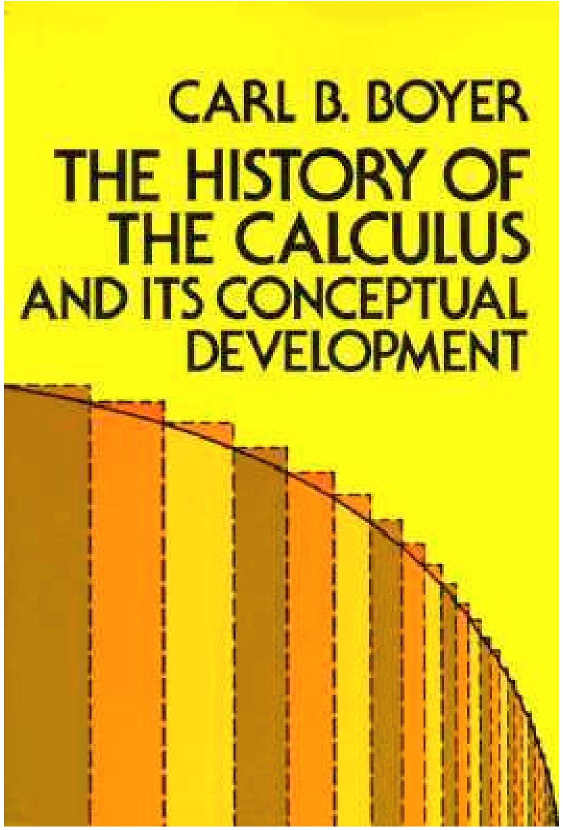
(6) liever eerst oppervlakte (de integraal)

(7) problemen bij de standaard aanpak

(8) vragen als voorzet voor discussie

# Overigens wat literatuur

https://archive.org/details/TheHistoryOfTheCalculusAndItsConceptualDevelopment



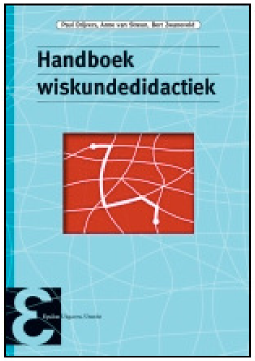
http://www.fisme.science.uu.nl/nl/handboek/hoofdstukken/

home
nieuws
zoeken
catalogus
zebra-reeks
spijkers
wiskunde D
auteurs
onderwerpen
bestellen
nieuwsbrief
contact
colofon
links

72

# Handboek wiskundedidactiek

| | |
|---|---|
| **Auteurs** | **Paul Drijvers**<br>**Anne van Streun**<br>**Bert Zwaneveld** |
| **Bedoeld voor** | aanstaande wiskundeleraren in (de tweede fase van) het voortgezet onderwijs, maar ook voor hun collega's die daar al werkzaam zijn, voor opleiders in het eerste- en tweedegraads gebied, auteurs van schoolmethoden en andere belangstellenden. |
| **Uitgave** | 3e druk, 2013. |
| **ISBN** | 978-90-5041-130-1 |
| | *400 pagina's* |



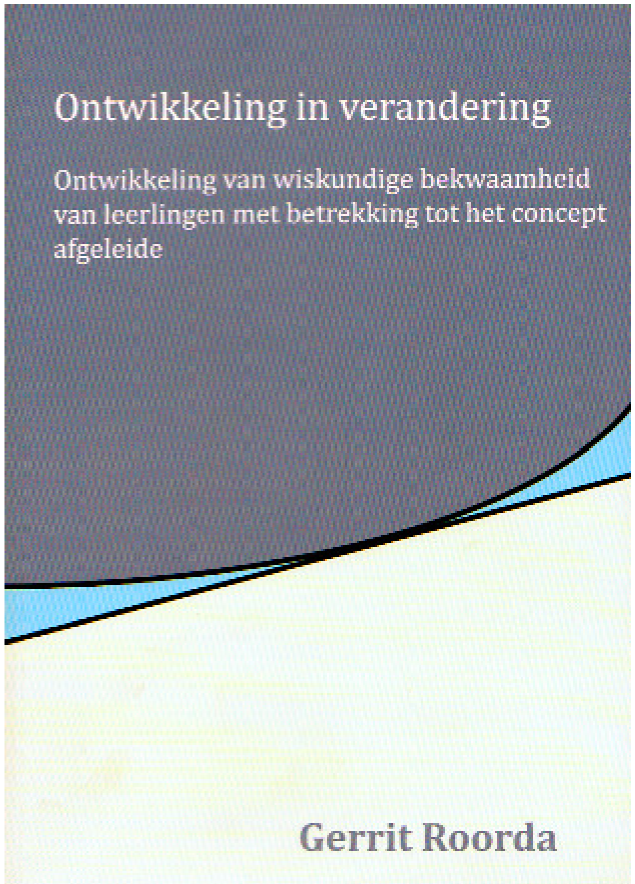

**Prijs € 34,00**
nieuwe druk

**Inhoud**

Het Nederlandse wiskundeonderwijs ziet er heel anders uit dan in 1974, toen het invloedrijke boek Didactiek van de wiskunde van Joop van Dormolen verscheen:

# Proefschrift Gerrit Roorda

http://www.rug.nl/staff/g.roorda/proefschriftGerritRoorda.pdf



# Website David Tall

http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/index.html

THE UNIVERSITY OF WARWICK

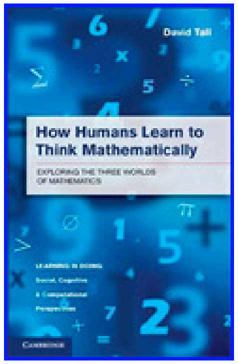
merc MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH CENTRE

HOME | Research | Downloads | News | Links

**David Tall** - Professor in Mathematical Thinking

Welcome to the HOME page of my website.

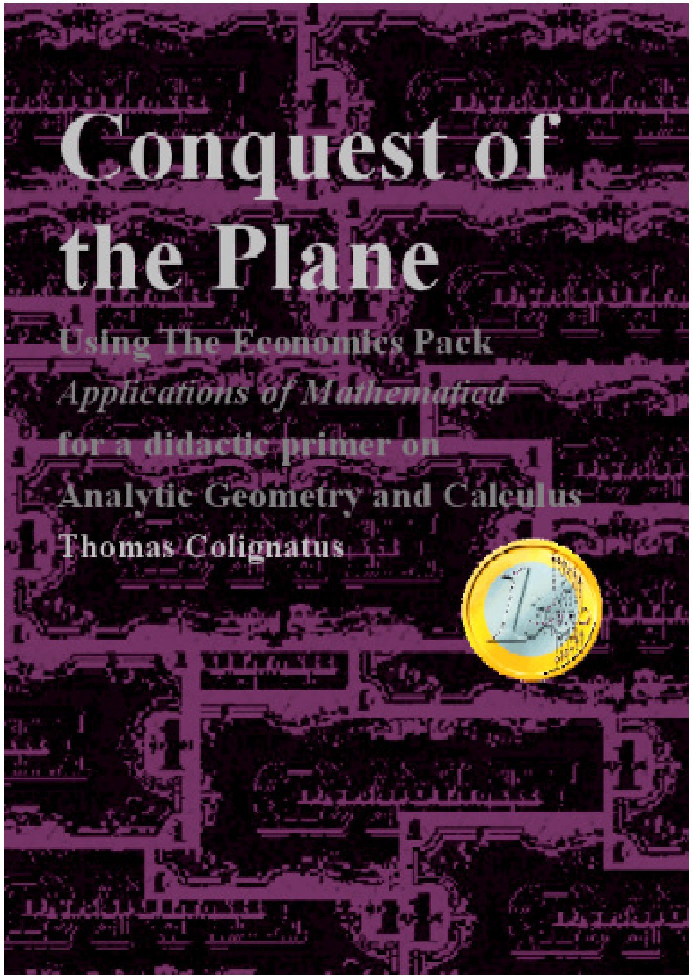
My book on ***How Humans Learn to Think Mathematically*** has been published in September 2013 (Paperback $39.99, Hardback $99.99). On Amazon.co.uk the price is Paperback £25.32, hardback £48.63 and other deals include **The Book Depository** which currently quotes world-wide delivery including postage at a competitive price.
A number of new papers (and drafts) have been added recently. Feel free to use information about my **research** as a resource, or **download** a paper. There is NEW **news** about recent changes on this site (made on **Wednesday, October 2nd 2013 )** , and also **drafts** of earllier papers and **links** to other sites of interest.
See below for more information, including my students and my supervisors/mentors back via Newton and beyond.




- information on several **research themes** with links to relevant papers:
  - cognitive development | concept image | cognitive units | cognitive roots | generic organisers
  - procepts | algebra | limits, infinity & infinitesimals
  - visualization | calculus (& computers) | computers in school and college
  - problem solving | advanced mathematical thinking | proof
  - *three worlds of mathematics*
  - *lesson study*
  - *How Humans Learn to Think Mathematically* NEW

http://thomascool.eu/Papers/COTP/ConquestOfThePlane.pdf (2011)

Eerste presentatie in “A Logic of Exceptions” (2007)



# Overigens wat we hier *niet* doen

- Abstracte algebra van ‘derivation’
  http://en.wikipedia.org/wiki/Derivation_(abstract_algebra)

- Meadows & Fields (division by zero)
  http://staff.science.uva.nl/~janb/#researchprojects

Nogal treurig stemmende video’s op internet:

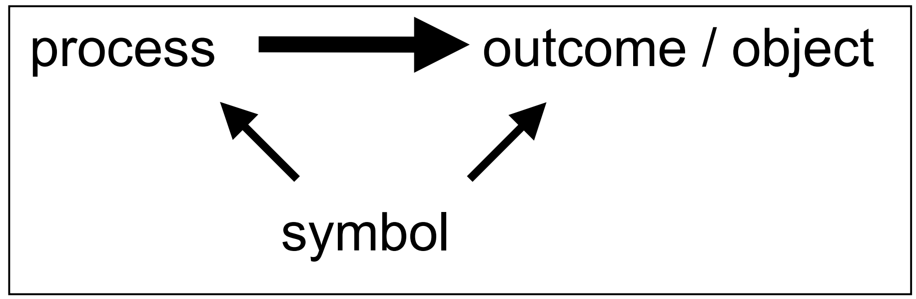
- http://www.khanacademy.org/math/calculus/limits_topic/continuity-limits/v/fancy-algebra-to-find-a-limit-and-make-a-function-continuous (zie met name minuut 4)

- http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/video-lectures/

## (1) *Procept* (process-concept), Gray & Tall 1994

http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/procepts.html

elementary procept:




An *elementary procept* is an amalgam of three components: a *process* which produces a mathematical *object* and a *symbol* which is used to represent either *process* or *object*.

A *procept* consists of a collection of elementary procepts that have the same object.

> √2: rekenmachine grijpen of als symbool manipuleren ?
> Zelfstandig naamwoord (rit) en werkwoord (rijden).

Gray & Tall's notion of procept improved upon the existing literature by noting that mathematical notation is often ambiguous as to whether it refers to process or object. Examples of such notations are:

$3 + 4$ : refers to the process of adding as well as the outcome of the process.

$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)$ : refers to the process of summing an infinite sequence, and to the outcome of the process.

$f(x) = 3x + 2$ : refers to the process of mapping x to 3x+2 as well as the outcome of that process, the function f(x).

http://en.wikipedia.org/wiki/Procept

# (2) Variabele: niet alleen getal maar ook naam

We kunnen een *reële variabele* zien als een procept:

Variabele:

kies maar $\longrightarrow$ gekozen waarde

$\nwarrow \quad \nearrow$

*x* (“*x*” is de naam)

Numeriek: *x* is steeds gedacht als ‘een getal’. Dit is de denkwereld van de afgeleide volgens Weierstrasz.

Algebra: met “x” een naam (nu een naam van één letter), heet *x* een “symbool”, en dit symbool laat zich manipuleren volgens afgesproken regels. Dit is onze huidige denkwereld.

Werk bijv. de haakjes weg: $(x+1)(x-1)$

# (3) Standaard-deling met limietbegrip

De standaard-aanpak is numeriek geöriënteerd.
Standaard delen levert een hoop gedoe op.

$$f[x] = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 \; als \; x \neq 1 \\ niet\ gedefinieerd \; als \; x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

*f*[*x*] is *continue* in punt *a* desda de limiet daar *f*[*a*] is.

$$g[x] = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \; als \; x \neq 1 \\ 2 \; als \; x = 1 \end{cases}$$

Voorstel om van vaag naar scherp taalgebruik te komen.

Wanneer we zeggen dat een functie $f[x]$ *niet gedefinieerd* is als $x = a$, bedoelen we dan

- óf dat $x = a$ wel deel uitmaakt van het domein van $f$, en dat slechts de waarde in het bereik ontbreekt,
- óf dat $x = a$ geen deel uitmaakt van het domein,
- óf een warrige combinatie van bedoelingen ?

Handig is deze betekenis af te spreken:

- dat $x = a$ geen deel uitmaakt van het domein
- zodat het domein kan worden uitgebreid met $x = a$
- zodat het bereik kan worden uitgebreid met $f[a]$ = limietwaarde $f[x]$ voor $x \to a$

Bij de afgeleide is het differentiequotient $\Delta f / \Delta x$ niet gedefinieerd voor $\Delta x = 0$. Domein en bereik worden via het differentiaalquotient uitgebreid met de limiet voor $\Delta x \to 0$.

## (4) Statische versus dynamische deling

Oriëntatie op algebra. Expliceren domein-manipulatie.

Statische deling: $y / x$ = teller / noemer, zoals boven, dus niet gedefinieerd voor $x = 0$.

Dynamische deling: $y // x = \{y / x$, tenzij $x$ symbolisch is: neem aan dat $x \neq 0$, vereenvoudig $y / x$, verklaar het resultaat geldig voor $x = 0$ met uitbreiding van het domein$\}$.

- in computeralgebra: $y // x$ = Simplify[$y / x$]
- $4 // 0 = 4 / 0$ en is dus niet gedefinieerd
- voor variabele $x$ geldt $x // x = 1$ voor alle reële $x$
- een noemer $(x - x)$ is geen variabele want $x - x = 0$

Er is een manipulatie van het domein van geldigheid: Wanneer het domein van de noemer ook nul bevat, dan is dit opgeschort tijdens het proces van vereenvoudiging, maar het domein wordt weer van toepassing voor de uitkomst.

## (5) De afgeleide komt er gewoon uitrollen

De afgeleide wordt dan gedefinieerd met het programma:

$f\,'[x] = \mathbf{d}f \,/\, \mathbf{d}x = \{\Delta f \,//\, \Delta x$, kies daarna $\Delta x = 0\}$

waarin het domein van $\Delta x$ eerst wordt opgeschort bij 0, dan uitgebreid met 0 en vervolgens tot 0 beperkt.

Onderscheid *deze definitie* en *didactiek hiermee* (zie onder):

- Deze definitie is niet het probleem (het is een definitie)
- Het (didactische) probleem is waarom je het begrip van een ‘afgeleide’ zou willen gebruiken
- De didactiek t.a.v. de afgeleide is nu eenvoudiger doordat er geen limiet meer in voorkomt (überhaupt bij deling)
- Biedt deze definitie nog meer aanlokkelijke didactiek ?

Vergelijk

(a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

helderheid in de manipulaties in algebra en domein

(b) $\underset{\Delta x = 0}{\text{zet}}\ \Delta f \,//\, \Delta x$

helderheid in de volgorde van de bewerkingen

(c) $\{\Delta f \,//\, \Delta x, \text{ zet } \Delta x = 0\}$

Merk dus op:

(a) Bij het bepalen van een standaard afgeleide is er ook vereenvoudiging. Bijv. bij het differentiequotient voor $x^2$:

$$\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \ldots$$

(b) Een lezer gaat accoord: “Waarom laat men het op een limiet uitdraaien, en vereenvoudig je de uitdrukking niet, voordat je in de buurt van 0 bent gekomen?”

(c) De manipulatie van het domein in *y // x* expliciteert slechts wat al impliciet gedaan wordt.

(d) De limiet voor $\Delta x \to 0$ in het differentiaalquotient is equivalent aan {vereenvoudigen en uitbreiden van het domein naar 0 van het differentiequotient, dan $\Delta x = 0$}.

Pro memorie:

De limiet is geen proces maar statische predicatenlogica.

Voor *f*[*x*] geeft iedere *x* de waarde *f'*[*x*], met ε > 0 en δ > 0:

$$f'(x) = d \text{ if and only if for every } \varepsilon \text{ there is a } \delta \text{ such that when}$$
$$0 < |\Delta x| < \delta\,,\ \left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$$

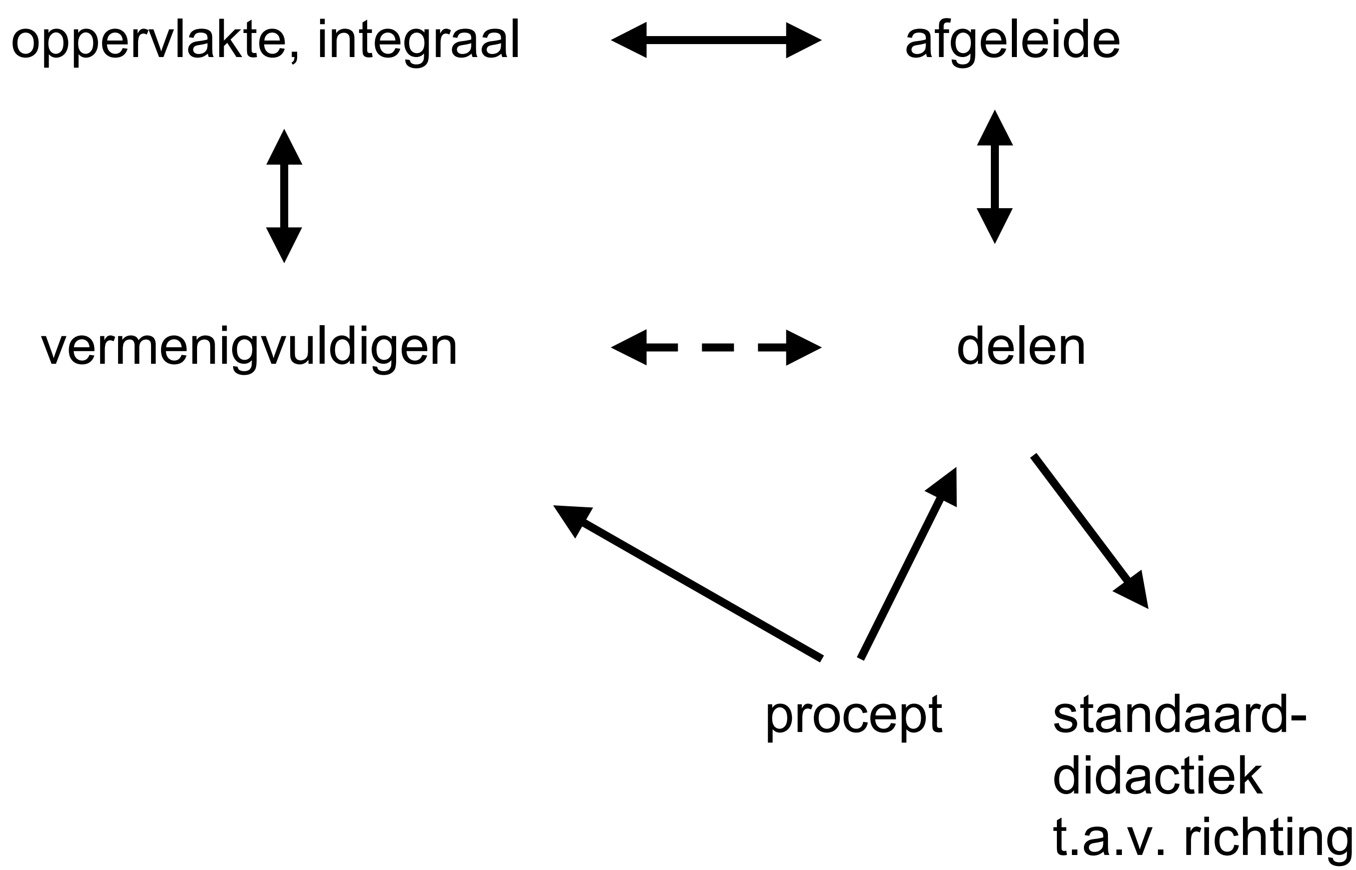
Verhalen over ‘hij gaat naar nul’ zijn heuristisch, en scheppen een denkwereld die voor de afgeleide niet onmiddellijk relevant hoeft te zijn.

Het blijft geheimzinnig wat “hij is nul” betekent.

PM. Hierboven ook verwarrende haakjes bij *f*(*x*) i.p.v. *f*[*x*].

# (6) Liever eerst oppervlakte (de integraal)

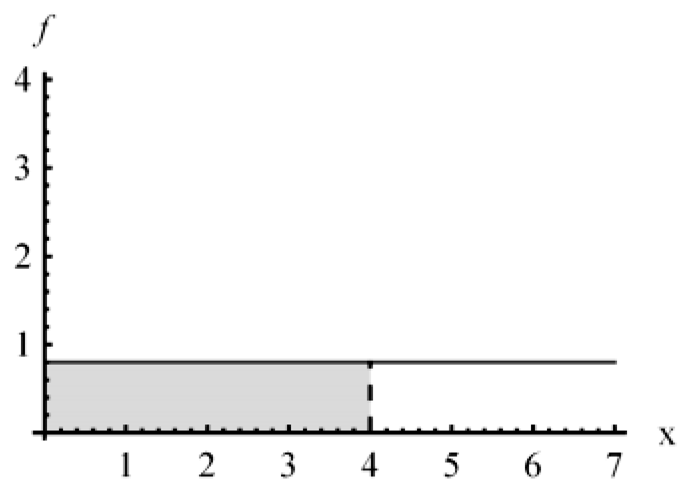
Waar te beginnen in de didactiek van calculus ?

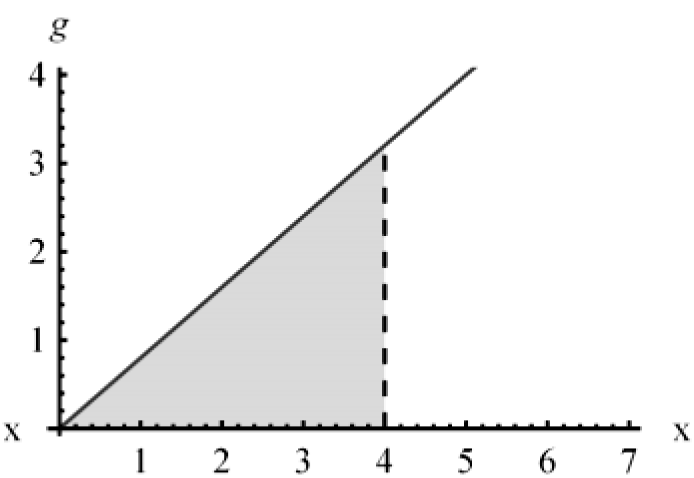


## COTP begint met calculus aldus (p149):

Calculus concerns the measurement of surface between a function and the horizontal axis. A key aspect is also the change in surface. The basic cases of rectangle and triangle are in the following graphs.

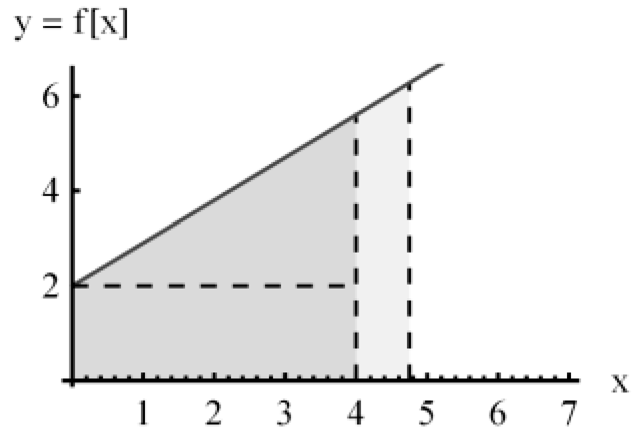
- The surfaces under $f[x] = 0.8$ and $g[x] = 0.8\,x$, for $x$ over the interval [0, 4].

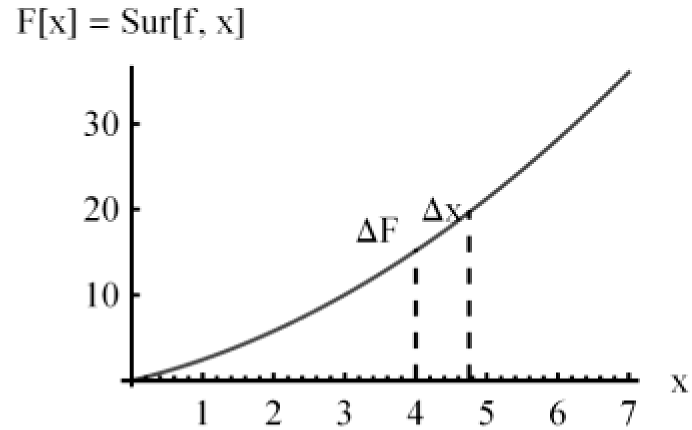



The surfaces under $f$ and $g$ for $x$ over [0, 4] are easily calculated. The constant function $f$ gives a rectangle 0.8 * 4 = 3.2. The ray function $g$ gives a triangle ½ $h\,w$ = ½ (0.8 * 4) * 4 = 6.4. Let us make it more formal.

$F[x]$ = Sur[$f$, $x$] geeft het oppervlak tussen $y = 0$ en $y = f[x]$, en tussen $x = 0$ en $x$ zelf. Bijvoorbeeld voor $F[x] = x^2$:




$$\Delta F[x] = F[x+\Delta x] - F[x] \approx f[x]\, \Delta x$$

$$f[x] \approx \Delta F[x] \,//\, \Delta x$$

$$f[x] = \{\Delta F[x] \,//\, \Delta x, \text{ zet } \Delta x = 0\} = F'[x]$$

Dit rechtvaardigt de definitie van de afgeleide.

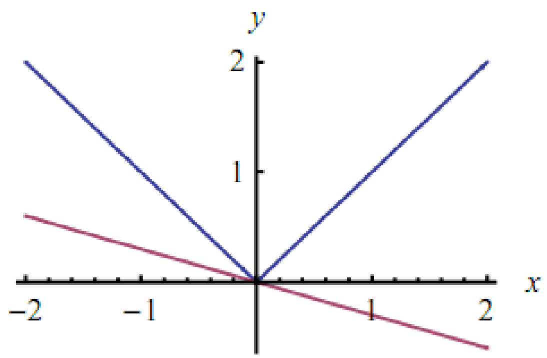
Een functie geeft de mate van verandering van het oppervlak onder de functie. (Afgezien van de integratieconstante.)

COTP p160

### 11.4.2 Derivative and slope of abs[x]

What is the slope of $|x|$ at the origin ? What are the tangent and tangent line ?

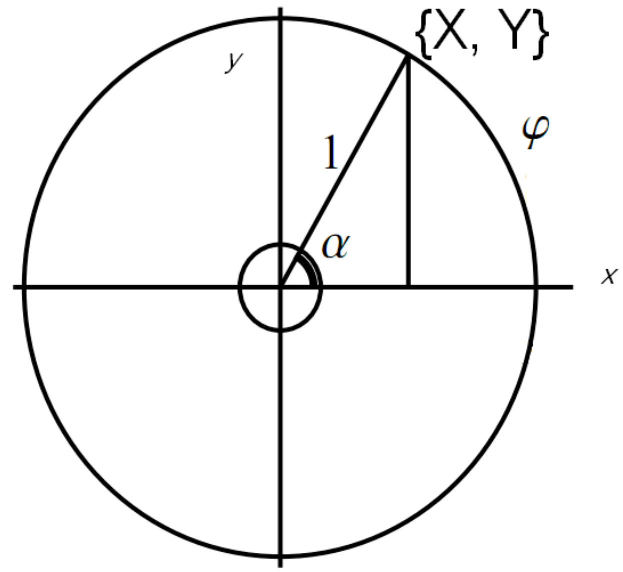
- Abs[$x$] and an example line through the origin.




- We nemen Abs'[$x$] = Sgn[$x$] i.h.a.. Voor $x = 0$: $\Delta F$ // $\Delta x$ = (|0 + $\Delta x$| - |0|) // $\Delta x$ = |$\Delta x$| // $\Delta x$ = Sgn[$\Delta x$], zet $\Delta x = 0$
- Voor $x < 0$ is de richting –1 en voor $x > 0$ is de richting 1, dus in $x = 0$ is de richting niet gedefinieerd.
- De standaard-aanpak vat de afgeleide op als de richting, en deze is bij Abs'[0] niet gedefinieerd. De didactiek van limieten links en rechts is niet nodig.

COTP p41, 121

Zoals de horizontale en verticale coördinaten worden weergegeven met {*x, y*} is het zinvol om de coördinaten op de eenheidscirkel *r* = 1 weer te geven met hoofdletters {*X, Y*}.




Eenheid voor het meten van hoeken: het platte vlak *zelf*.

Hoek α is te vinden op de cirkel *r* = 1 / Θ met omtrek 1.

Een boog wordt gemeten op een cirkel, met name φ = α Θ op de eenheidscirkel.

ur = unit radius circle
Θ = 1 archi = 2π

$X_{ur}[\alpha] = X[\varphi] = \mathrm{Cos}[\varphi]$

$Y_{ur}[\alpha] = Y[\varphi] = \mathrm{Sin}[\varphi]$

Resultaat van *Conquest of the Plane* (COTP)(2011):

Met de algebraïsche aanpak blijkt het mogelijk het programma voor de middelbare school op te bouwen, en de afleidingen en bewijzen inzichtelijk te presenteren:

(a) integralen en afgeleiden van de standaardfuncties
- polynomen
- exponentiële functies en teruggevonden exponentiële functies ("logaritmen")
- goniometrische functies (xur, yur, tur) ("cos, sin, tan")

(b) tevens:
- regels voor integreren en differentiëren
- definitie van *e*
- partiële afgeleide (zou ook in het programma moeten)

Pro memorie: COTP heeft ook andere resultaten.

# (7) Problemen bij de standaard aanpak

Getal en Ruimte (2006), VWO B, deel 1, p104: voortdurend “lim” schrijven ...

**Differentieerregels aantonen**

Het berekenen van de afgeleide heet **differentiëren**.

Met de definitie van de afgeleide zijn regels voor het differentiëren aan te tonen.

Je kunt het voorbeeld ook oefenen met de applet
De afgeleide van $f(x) = ax^2$ op de ▸cd-rom.

**voorbeeld**

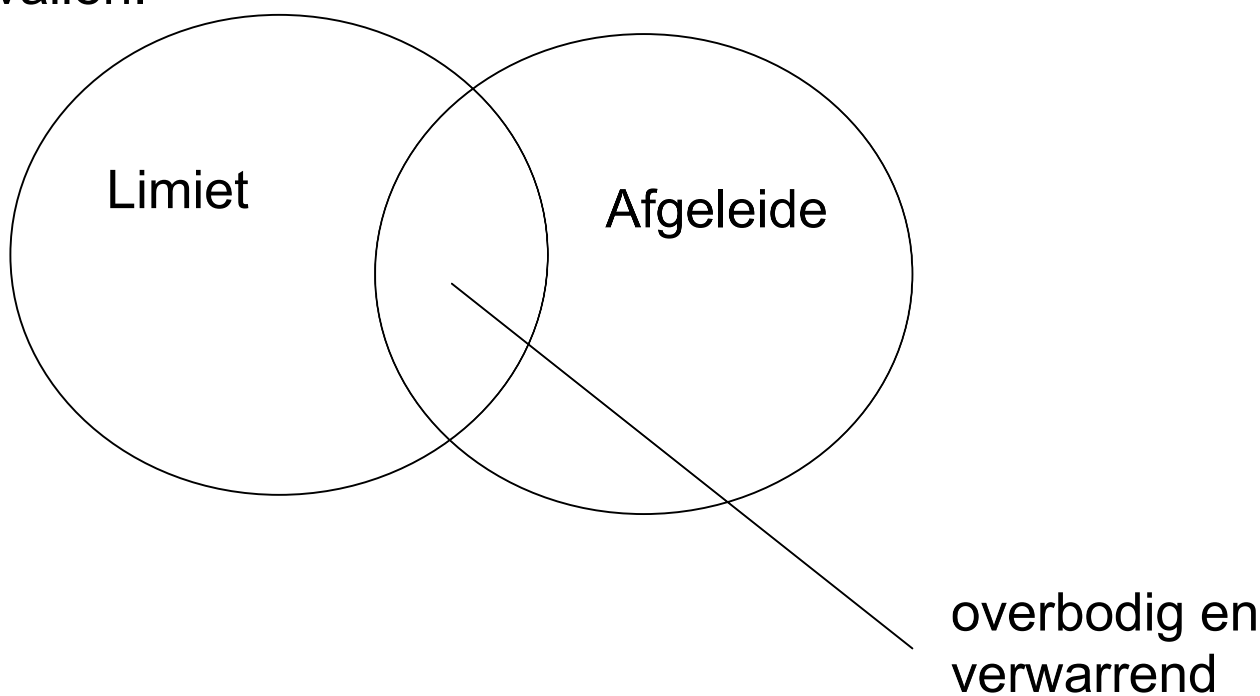
Toon aan: $f(x) = ax^2$ geeft $f'(x) = 2ax$.

*Uitwerking*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x^2 + 2xh + h^2) - ax^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax^2 + 2axh + ah^2 - ax^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2ax + ah) = 2ax$$

Limieten worden nu als een wezenlijk onderdeel van calculus beschouwd, terwijl zij voor de huidige stof geëlimineerd kunnen worden en als verwarrend beschouwd kunnen worden. Limieten blijven relevant voor andere gevallen.



De ontwikkeling van de wiskundige bekwaamheid geschiedt nu trager dan nodig. Roorda Hfd 3, “bekwaamheid”, p27

In het concept afgeleide zijn verschillende aspecten en relaties tussen aspecten te identificeren. De wiskundige Thurston (1994) stelt dat mensen onderdelen van wiskunde op verschillende manieren begrijpen en illustreert dit met het concept afgeleide:

> *The derivative can be thought of as:*
>
> *(1) Infinitesimal: the ratio of the infinitesimal change in the value of a function to the infinitesimal change in a function.*
>
> *(2) Symbolic: the derivative of $x^n$ is $n \cdot x^{n-1}$, the derivative of sin(x) is cos(x), the derivative of $f \circ g$ is $f' \circ g * g'$*, etc.
>
> *(3) Logical: $f'(x) = d$ if and only if for every $\varepsilon$ there is a $\delta$ such that when* $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$
>
> *(4) Geometric: the derivative is the slope of a line tangent to the graph of the function, if the graph has a tangent.*
>
> *(5) Rate: the instantaneous speed of $f(t)$, when $t$ is time.*
>
> *(6) Approximation: the derivative of a function is the best linear approximation to the function near a point.* ?
>
> *(7) Microscopic: the derivative of a function is the limit of what you get by looking at it under a microscope of higher and higher power.* (Thurston, 1994, p.3) Tall

Het gaat in deze opsomming volgens Thurston niet om verschillende definities

Transfer. Overdracht door de leerling van kennis “uit het vak wiskunde” naar vakken zoals natuurkunde en economie. Aansluitende didactieken door de docenten van die vakken.

Dit is altijd een probleem geweest.

Elementen in een verklaring:

(a) Natuurkunde en economie gebruiken weinig limieten

(b) Het wiskundeprogramma is traag met de afgeleide omdat het moeilijker wordt gemaakt dan nodig

(c) Bij wiskunde een focus op en veel aandacht voor verandering, differentiequotient, helling, richting, richtingscoëfficiënt ... terwijl je beter bij oppervlakte kunt beginnen, en de afgeleide dan eruit rolt.

(d) Wiskunde-didactiek rommelt aan met “Euclidische axiomatiek” en “realistische wiskunde” in plaats van empirisch op leerlingen te letten.

## (8) Vragen als voorzet voor discussie

(1) Wat is onduidelijk of roept nadere vragen op ?

(2) Is de aanpak nu al interessant voor lerarenopleidingen en trainingen van docenten, om hen alert te maken op nieuwe didactiek en de valkuilen in de bestaande aanpak ?

(3) Is de aanpak niet reeds interessant voor hoger onderwijs waarin wiskunde wordt gebruikt ?

(4) Voor school is de exameneis VWO-B p7, Domein Bb, punt 9.3: "het differentiaalquotiënt gebruiken om een functie lokaal lineair te benaderen". Wanneer je via de aanpak hierboven calculus begrijpt is het differentiaalquotient ook nog wel uit te leggen. Een traject: acceptatie in het veld, proefprojecten, aangepaste leerboeken, training docenten, t.z.t. herformulering van de exameneis. Waarom niet ?

## Addendum: Uit de discussie op 9 november 2013

(1) Bij “los $x$ op uit $x\ (x + 2) = x$” is het verleidelijk $x$ weg te delen “omdat het nu mag”.

COTP p57: $x$ is hier geen variabele maar een onbekende constante.

Oplossingen zijn $x = 0$ of $x \neq 0$ en in dat laatste geval inderdaad wegdelen: $x = -1$. Of $x$ naar links brengen: $x\ (x + 2) - x = x\ (x + 2 - 1) = x\ (x + 1) = 0$ en dan twee wortels.

Eventueel kun je “los $x$ op” beschouwen als “bepaal het domein van $x$ waarvoor de vergelijking waar is”, zodat $x$ een variabele is over het domein {-1, 0}. Dan is $x$ nog steeds te zien als een variabele. In dat geval blijft gelden dat er een keuze is wanneer je $y / x$ of of y // $x$ gebruikt. Dat laatste eerder voor verhoudingen dan voor vergelijkingen.

(2) Bij de overgang van Wiskunde B1,2 naar B zijn limieten eigenlijk al uit het programma verdwenen. Zie http://www.slo.nl/organisatie/inDeMedia/2008/S45C-108070809591.pdf, Jenneke Krüger, Euclides 83-8, p375: “Hoewel limieten weer in een subdomein opgenomen zijn is het niet de bedoeling hier een heel uitgebreid onderdeel van te maken. De limiet wordt beschouwd als een noodzakelijk concept bij de introductie van afgeleiden en bij bestudering van het asymptotisch gedrag van functies.” In de praktijk wordt er vaag over gepraat en bij asymptoten worden enkele grote of andere specifieke getallen ingevuld.

COTP komt derhalve als mosterd na de maaltijd t.a.v. het elimineren van limieten.

Antwoord: (a) limieten zijn belangrijk en zijn verwijderd met verkeerde reden, (b) gebruik van dynamische deling herstelt op inzichtelijke wijze de verloren exactheid (als die er was).